Un laboratorio sulle coniche

Firenze, 6 maggio 2007

Un laboratorio sulle coniche

- un percorso didattico sulle coniche in una classe terza liceo scientifico

- esperienza condotta in collaborazione con un laureando in matematica (indirizzo didattico): Alessio Donadi

  Titolo della tesi: *Un'esperienza di uso didattico del Museo della Matematica*

  Relatore: Brunetto Piochi

  2004

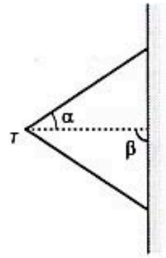
- un approccio "laboratoriale" alle coniche ispirato ad alcune proposte didattiche di Emma Castelnuovo

Un laboratorio sulle coniche

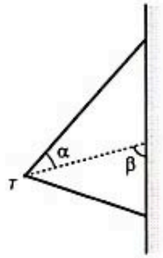
Gli aspetti "critici" della presentazione tradizionale delle coniche nel triennio della scuola superiore:

- un inserimento immediato nel piano (quando anche si guarda alle coniche come sezioni del cono difficilmente si cura il collegamento tra i due aspetti)
- un approccio quasi esclusivamente analitico (le proprietà caratterizzanti le coniche si traducono subito in equazioni e lo studio delle proprietà geometriche delle curve viene svolto a partire dalle loro equazioni)
- la mancanza di un punto di vista unitario delle coniche come luoghi geometrici del piano (l'unica caratteristica comune è quella di avere equazioni di secondo grado)
- l'assenza di riferimenti a contesti non-matematici (semmai recuperati solo alla fine del percorso)

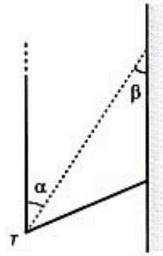
Luci …



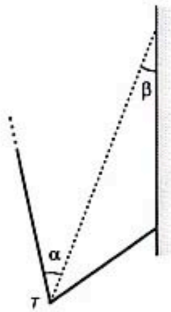
$\alpha<\beta$, $\beta=90°$
circonferenza



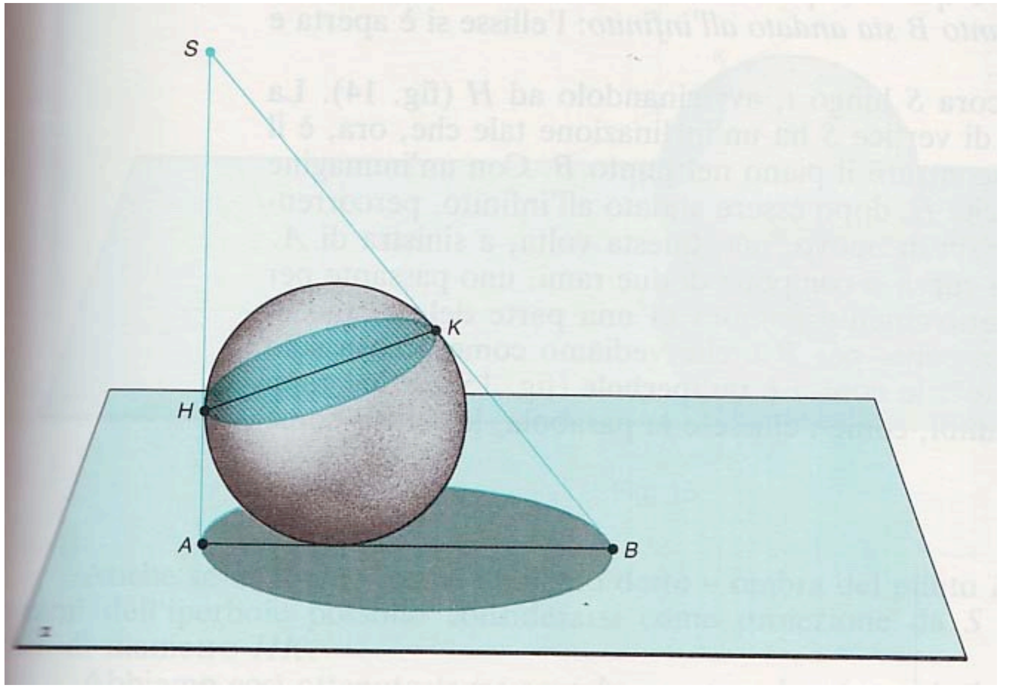
$\alpha<\beta$, $\beta<90°$
ellisse



$\alpha=\beta$
parabola



$\alpha>\beta$
iperbole

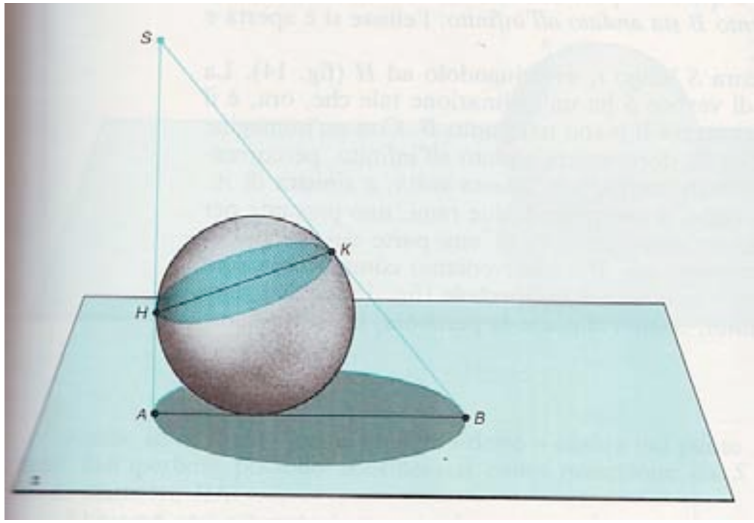


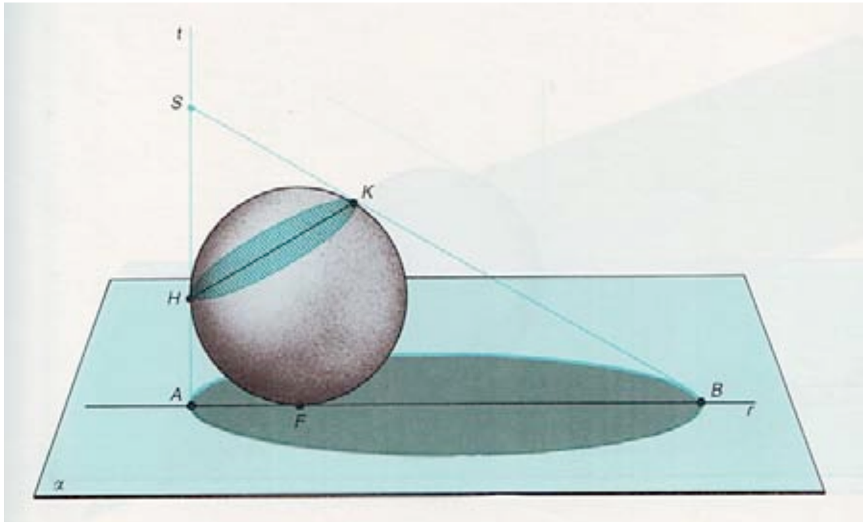
Scheda 1

Considera la sorgente di luce puntiforme *S* ed una sfera che tocca un piano α nel punto *F*. Qual è l'ombra della sfera sul piano? Scrivi le tue riflessioni pensando cosa accade al variare della sorgente luminosa *S* sulla retta passante per *A* e per *H* in cui si muove.

Ombre: la discussione

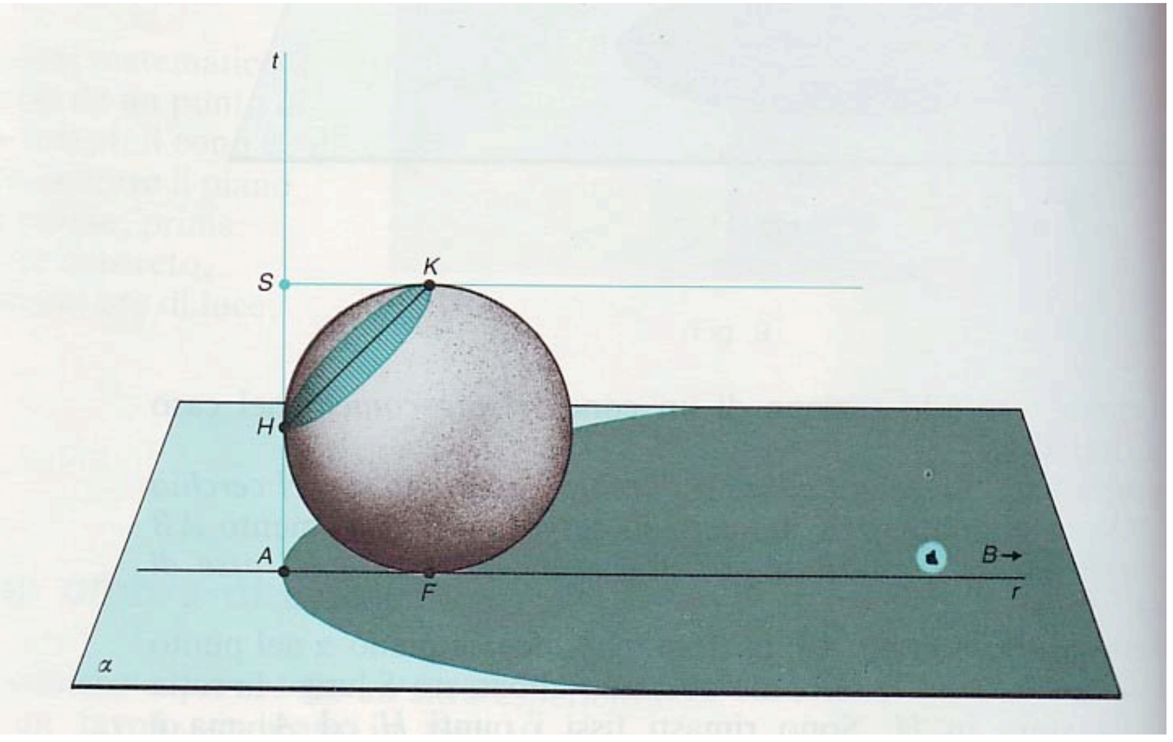
Marta (legge il proprio elaborato): "Nella figura l'ombra della sfera sul piano è un'**ellisse**. Al variare di *S* sulla retta passante per *A* e per *H* avremo che, se la sorgente luminosa tende ad avvicinarsi a *M*, *AB* si ingrandisce e l'ombra si allunga…





Ombre: la discussione

… fino a diventare una **parabola** quando *S* si trova nel punto *M*…



Ombre: la discussione

… mentre, se la sorgente luminosa tende ad allontanarsi da *M*, quando si trova all'infinito l'ombra proiettata sul piano α, è un **cerchio** con diametro *AB* che coincide col diametro della sfera."

Insegnante: "Quello che dice Marta è interessante. Riflettiamo un attimo: come è fatto il cono di luce quando *S* si trova all'infinito e la sua ombra su α è un cerchio?"

Margherita: "Diventa un cilindro!"

Insegnante: "Bene. Concentriamo ora però la nostra attenzione su cosa succede all'ombra quando *S* si trova sotto il punto *M*."

Margherita (legge il suo elaborato): "[…] Quando però *S* raggiunge e oltrepassa la tangente alla sfera parallela ad *AB* l'ombra si apre e assume la forma di una parabola."

Ombre: la discussione

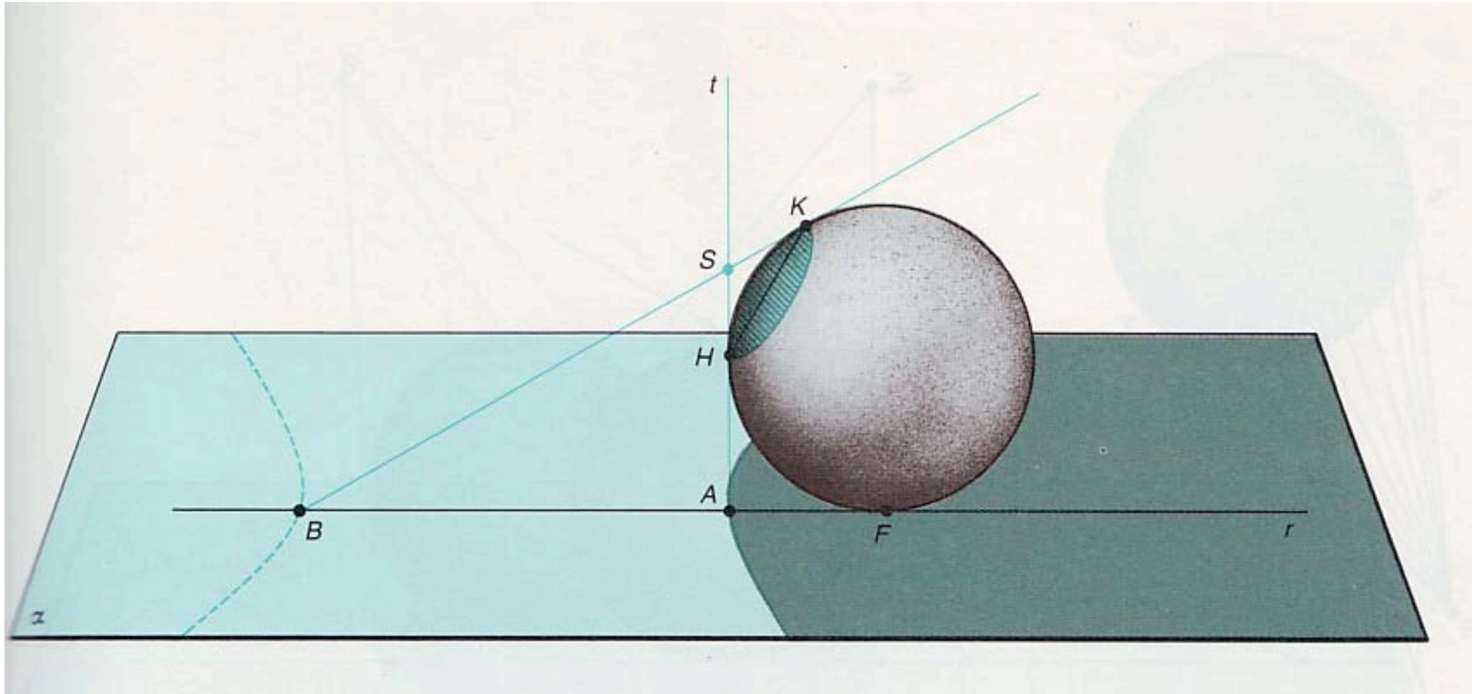
Tatiana (legge il suo elaborato): "[…] Quando la sorgente coincide con il punto *A* l'ombra della sfera sul piano considerato è una retta.

Quando la sorgente si trova tra il punto *A* e il punto *M* l'ombra ha la forma di una parabola che si allarga sempre di più via via che *S* si avvicina al punto *M*."

Insegnante: "Tatiana ha osservato una cosa corretta e molto importante. Quando *S* coincide con *A* l'ombra è una retta. Pertanto anche la retta può essere vista come una sezione conica. In particolare diremo che una retta è una conica degenere. Tatiana sostiene inoltre che si ha una parabola quando *S* si trova tra *A* e *M*. Tutti d'accordo?"

Ombre: la discussione

Tommaso: "Secondo me quando *S* si trova tra *A* e *M* troviamo un'**iperbole**."

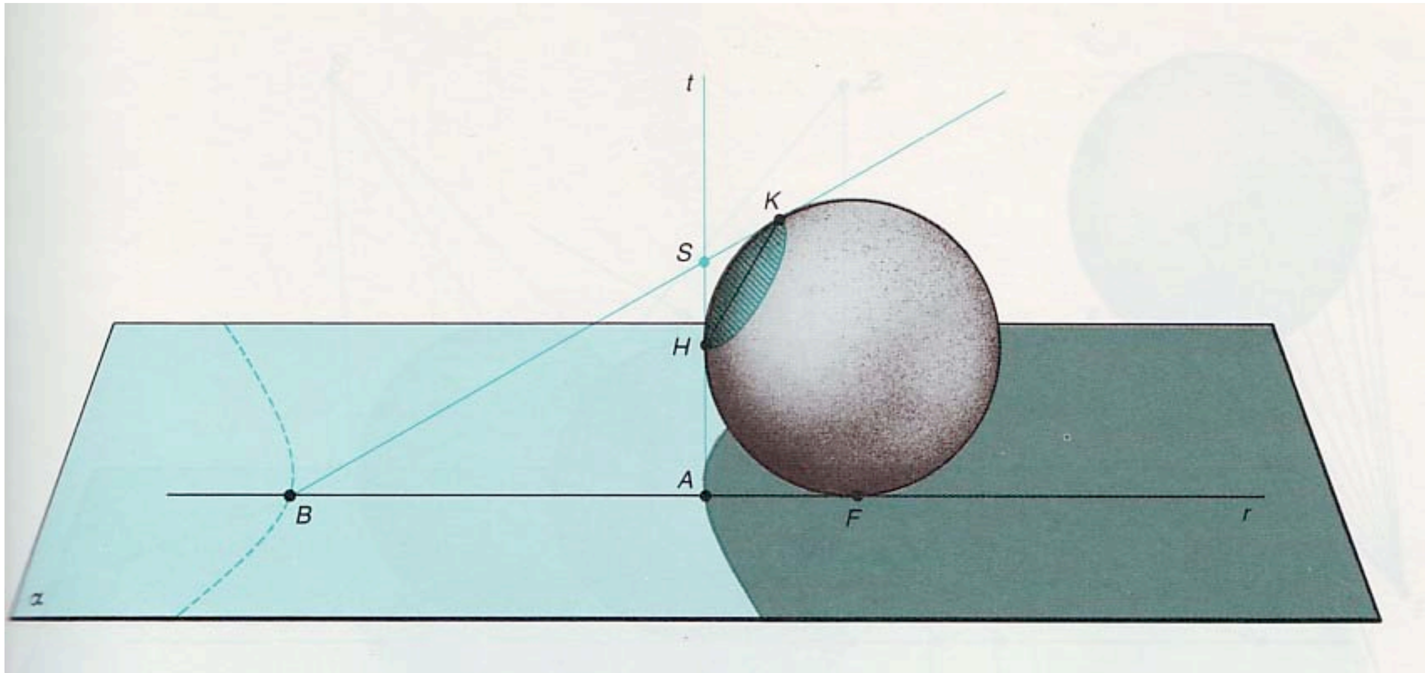


Insegnante: "Come fai a dirlo?"

Ombre: la discussione

Tommaso (servendosi di un disegno sulla lavagna):

"Perché la generatrice *SK* del cono ha una inclinazione tale da incontrare il piano α nel punto *B*. Si capisce allora che la curva si compone di due rami, uno passante per *A* che delimita l'ombra vera, e un altro passante per *B* che delimita l'ombra virtuale. Quindi è un'iperbole…"



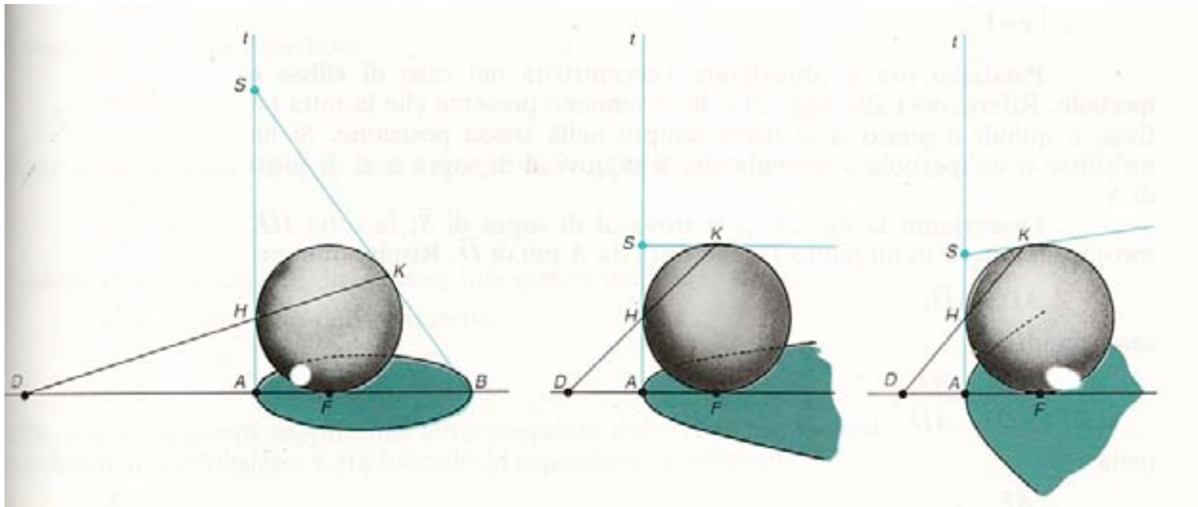
Ombre: la discussione

Insegnante: “Le affermazioni di Tommaso sono convincenti. Però si è servito di un disegno in cui *S* si trova tra *H* e *M*.

Cosa succede se *S* coincide con *H*?

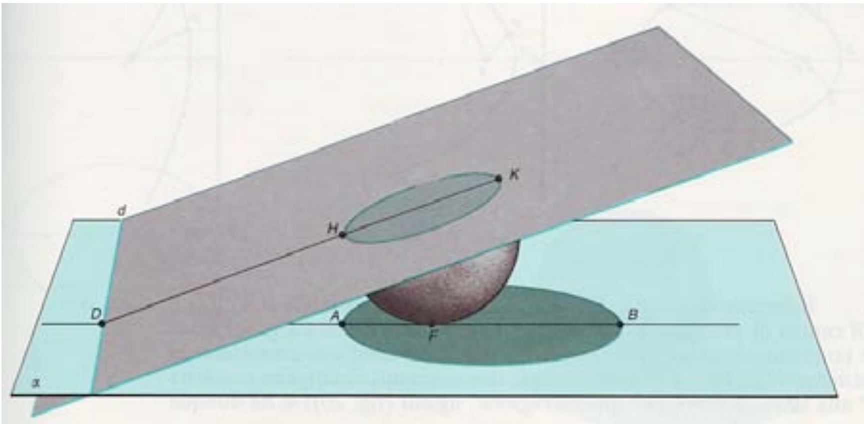
E se *S* si trova tra *A* e *H*?

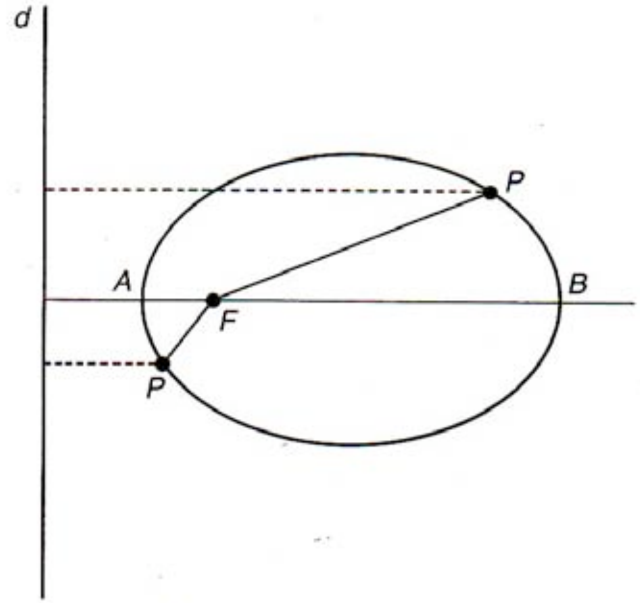
Le considerazioni che abbiamo svolto sono intuitive, ma quando parliamo di ellisse, di parabola o di iperbole dobbiamo dimostrare che si tratta di quelle curve che abbiamo definito all’inizio. È possibile dimostrare le nostre affermazioni?”



Eccentricità

Una analisi qualitativa:





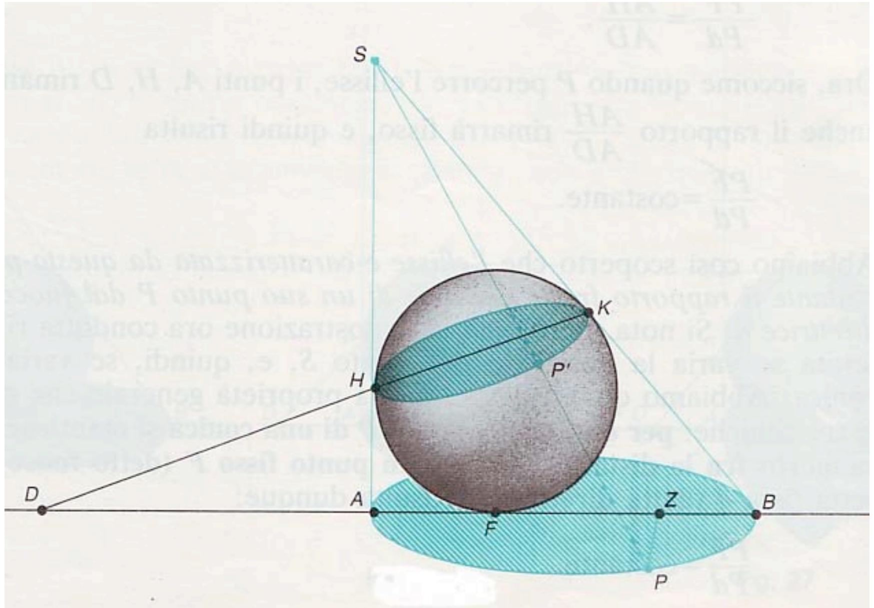
Se aumenta *PF* aumenta anche *Pd*. Possiamo dire che il rapporto

$$\frac{PF}{Pd}$$

è costante?

Eccentricità

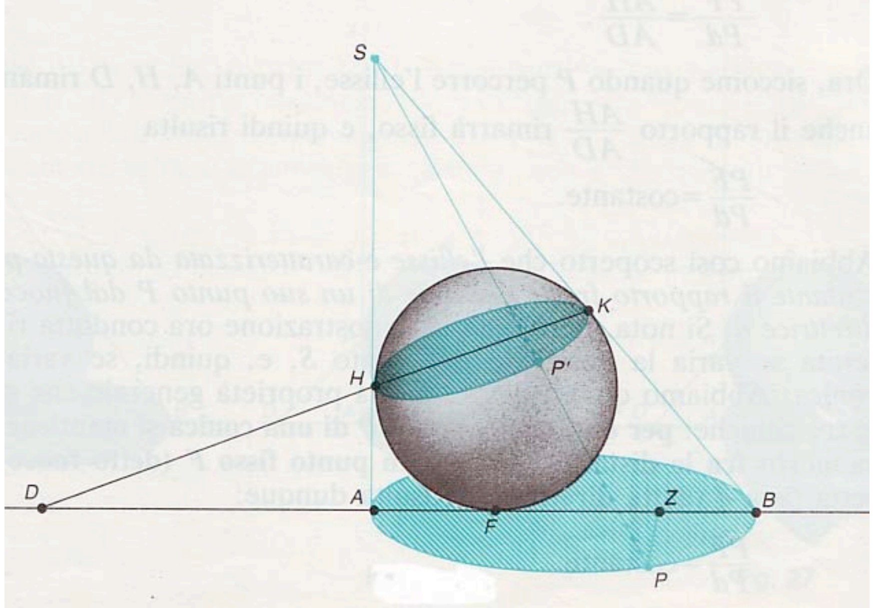
La risposta richiede una dimostrazione un po' impegnativa…



PF e *PP'* sono due segmenti di tangenti condotte da *P* alla sfera e dunque:

$$PF = PP'.$$

Eccentricità



Si ha inoltre:

$Pd = ZD$,

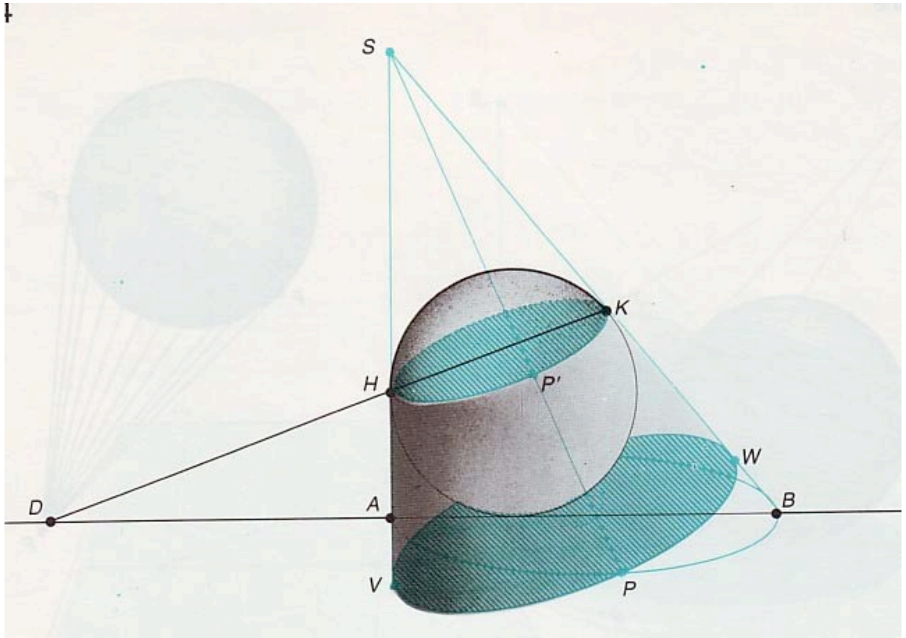
e quindi:

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{PP'}{ZD} \quad .$$

Se $P = A$ risulta $P' = H$ e $Z = A$ e dunque, in questo caso particolare:

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{AH}{AD} \quad .$$

Eccentricità

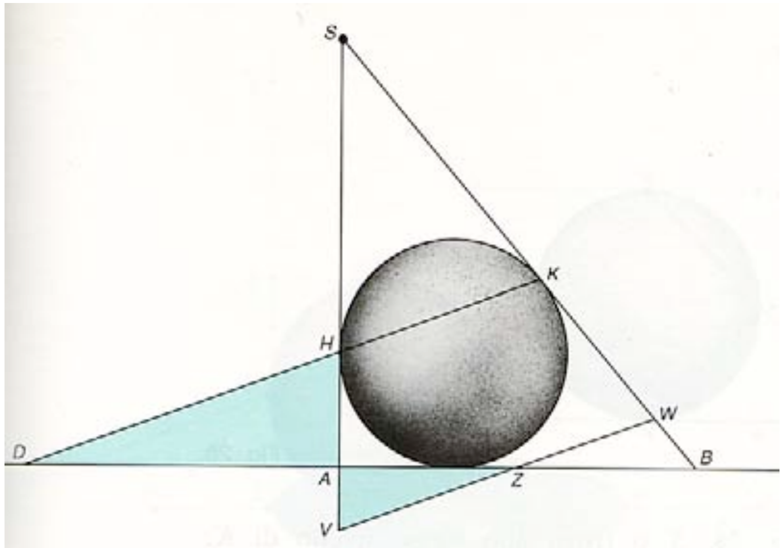


Quando P percorre l'ellisse si considera:

- il piano per P parallelo al piano del cerchio di diametro HK
- il cono di vertice S che sega questo piano in un cerchio di diametro VW parallelo ad HK
- $PP' = VH$ e quindi:

$$\frac{PP'}{ZD} = \frac{VH}{ZD}$$

Eccentricità



Per il Teorema di Talete:

$$\frac{VH}{ZD} = \frac{AH}{AD}$$

e quindi:

$$\frac{PP'}{ZD} = \frac{AH}{AD}$$

da cui:

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{AH}{AD} \quad .$$

Eccentricità

Come possiamo descrivere l'*ellisse* alla luce delle considerazioni fatte?

La dimostrazione che abbiamo fatto dipende dalla posizione del punto S?

Conclusione

Ogni conica è caratterizzata dalla proprietà che per un qualunque suo punto P il rapporto tra le distanza da un punto fisso F (*fuoco*) e da una retta fissa d (direttrice) è costante:

$$\frac{PF}{Pd} = e$$

La costante è detta *eccentricità* ed è indicata con *e.*

Eccentricità

Scheda

Il valore dell'eccentricità e varia al variare del tipo di conica. Cosa succede al valore dell'eccentricità nel caso dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole? Cosa succede nel caso del cerchio?

Scrivi le tue riflessioni al riguardo.

Eccentricità: la discussione

Alessandro: "Secondo me se l'eccentricità è uguale a 1 abbiamo una parabola mentre se è minore di 1 otteniamo un'ellisse od un'iperbole"

Insegnate: "Quindi non siamo in grado di classificare le coniche mediante l'eccentricità?"

Alessandro: "Come?"

Insegnate: "Stai dicendo che per uno stesso valore dell'eccentricità si possono ottenere un'ellisse o un iperbole…"

Francesco: "Per me se l'eccentricità vale 1 la conica è una parabola, se è minore di 1 è un'ellisse, se è maggiore di 1 è un'iperbole"

Eccentricità: la discussione

Insegnate: "Siete riuscire a dimostrare questo risultato?"

Marta (legge il proprio elaborato): "Possiamo considerare un caso particolare, quello in cui P coincide con A e quindi e è uguale al rapporto $\frac{AF}{AD}$. Se S si trova nel punto M abbiamo una parabola. In questo caso $AH = AD$, infatti:

- i triangoli AHD e SHK sono simili perché hanno gli nagoli uguali
- $SH = SK$ in quanto tratti di tangenti alla sfera condotte da S
- anche il triangolo AHD è isoscele.

Inoltre $AH = AF$ come tratti di tangenti condotte da A. Pertanto $AF = AD$ e quindi $e = 1$.

Nel caso dell'ellisse S si allontana da K e dunque $AF < AD$ ...

Eccentricità: la discussione

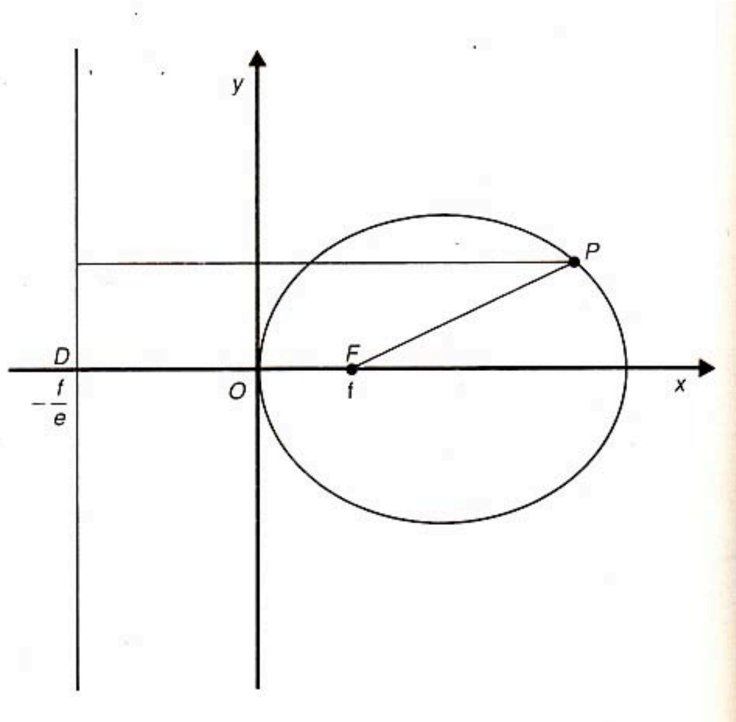
Pertanto $e < 1$. Infine nel caso dell'iperbole $AF > AD$ e dunque $e > 1$.

Insegnante: "Tutti d'accordo? C'è qualcuno che sa spiegare in maniera più dettagliata perché nei casi dell'ellisse e dell'iperbole rispettivamente $AF < AD$ e $AF > AD$?

[...]

Eccentricità ed equazioni

La proprietà che abbiamo visto, consente di esprimere unitariamente l'equazione di una conica in un opportuno riferimento cartesiano:



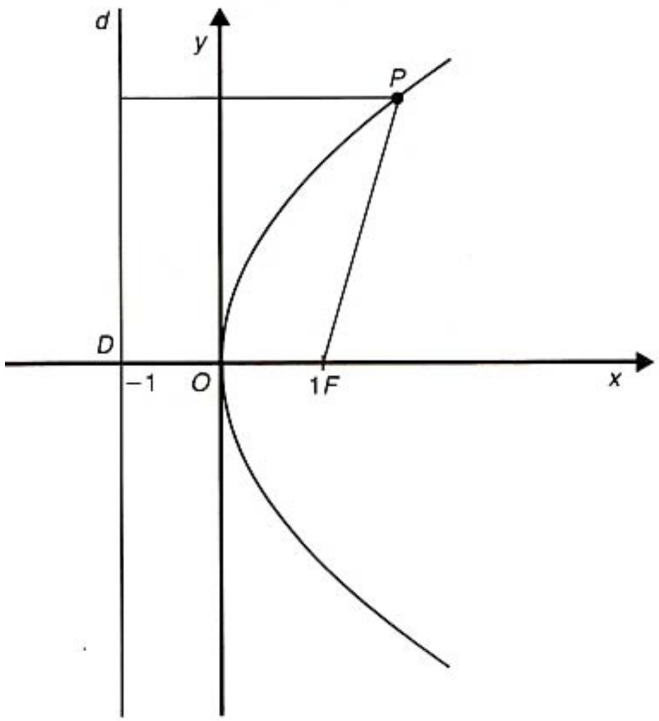
$$PF = e \cdot Pd$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e\left(x + \frac{f}{e}\right)$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2f(1+e)x = 0$$

Luoghi geometrici

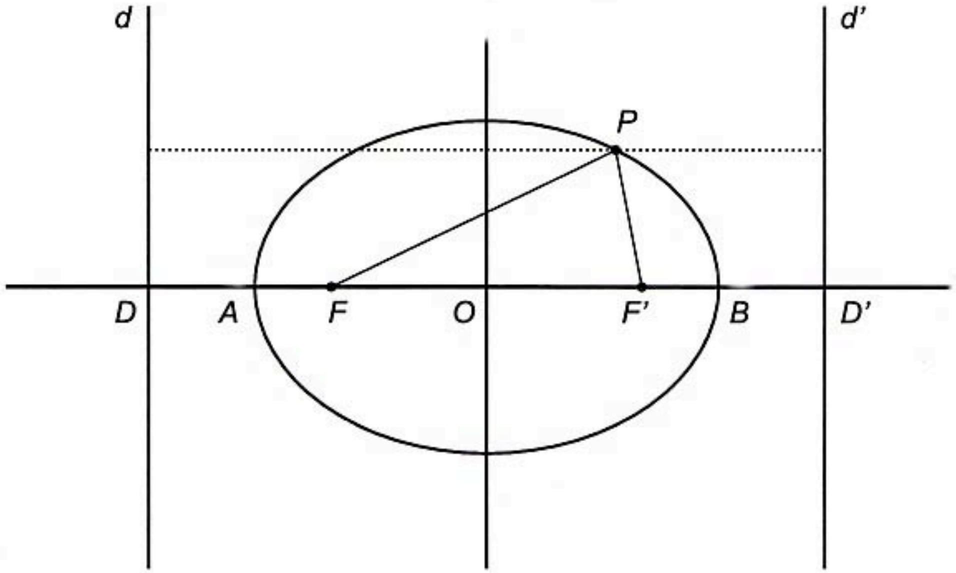
Nel caso della parabola ($e = 1$) la proprietà caratterizzante è molto semplice, l'equidistanza dei suoi punti da un punto fisso F e da una retta fissa d, e la sua equazione è più semplice:



$$y^2 - 4fx = 0$$

Lo è meno per ellisse ed iperbole, e le loro equazioni sono più difficili da interpretare…

Luoghi geometrici



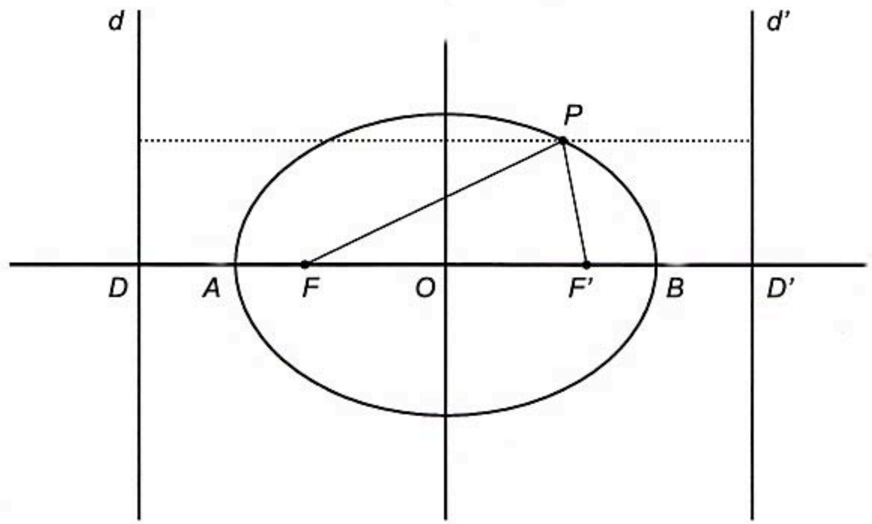
Scheda

Considera un'ellisse data da $\dfrac{PF}{Pd} = e$ (con $0 < e < 1$).

Considera inoltre il punto F' simmetrico di F rispetto alla retta parallela a d passante per il punto medio O di AB, e la retta d' simmetrica di d rispetto alla stessa retta.

Cosa puoi dire della quantità $PF + PF'$?

Luoghi geometrici



Poiché $\dfrac{PF}{Pd} = e$ si ha:

$$PF = e \cdot Pd$$

Ma anche $\dfrac{PF'}{Pd'} = e$ e quindi:

$$PF' = e \cdot Pd'$$

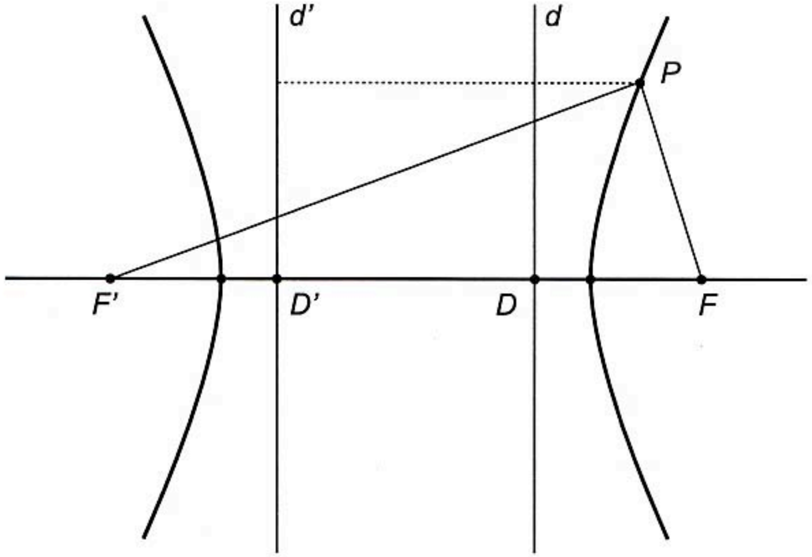
Quindi:

$$PF + PF' = e(Pd + Pd') = eDD'$$

cioè:

$$PF + PF' = cost.$$

Luoghi geometrici



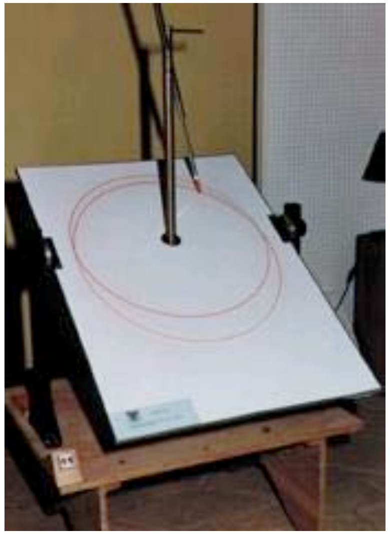
Scheda

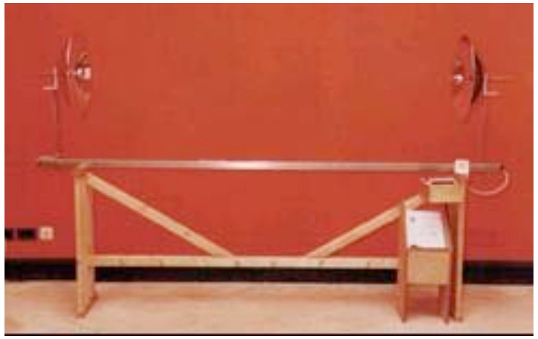
Considera un'iperbole data da $\dfrac{PF}{Pd} = e$ (con $e > 1$).

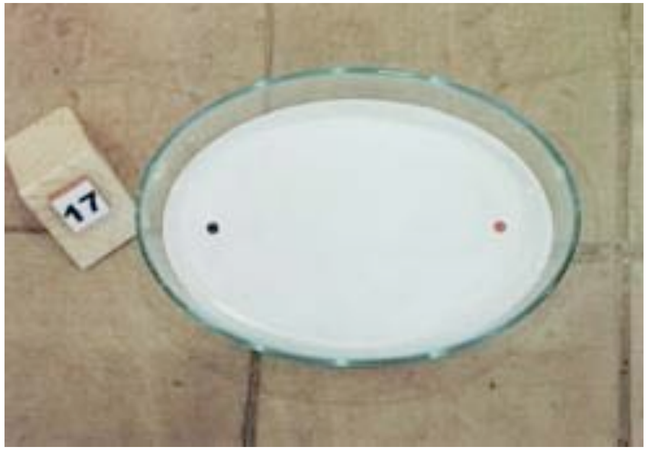
Considera la costruzione analoga a quella della scheda precedente.

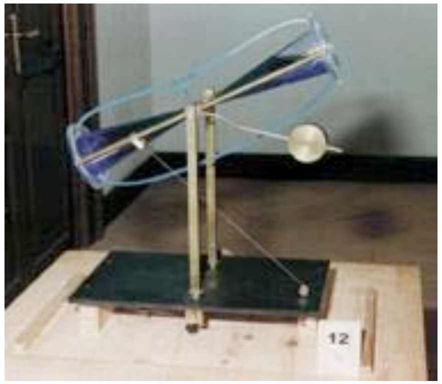
Cosa puoi dire della quantità $|PF - PF'|$?

Una visita al *Giardino di Archimede*





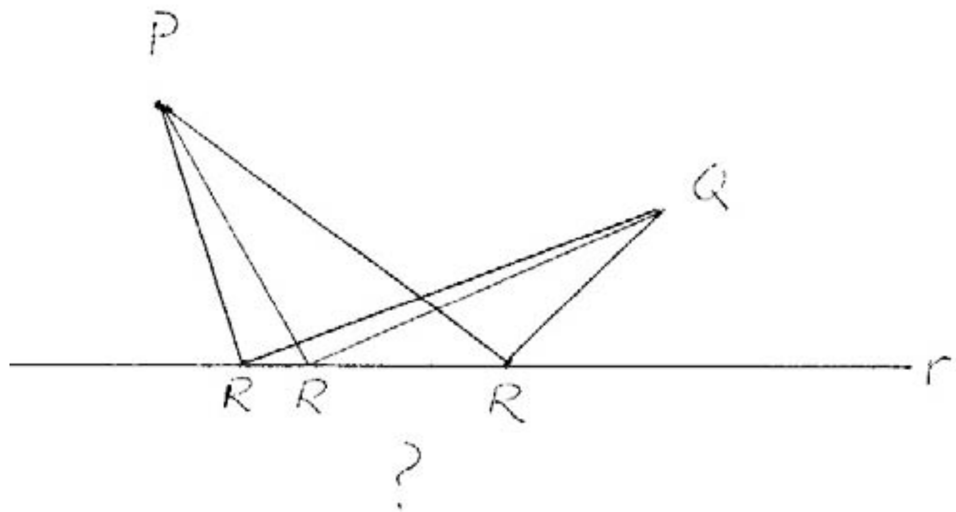




Il problema di Erone

Tornati dalla visita al museo di Priverno abbiamo esaminato più a fondo le proprietà della riflessione.

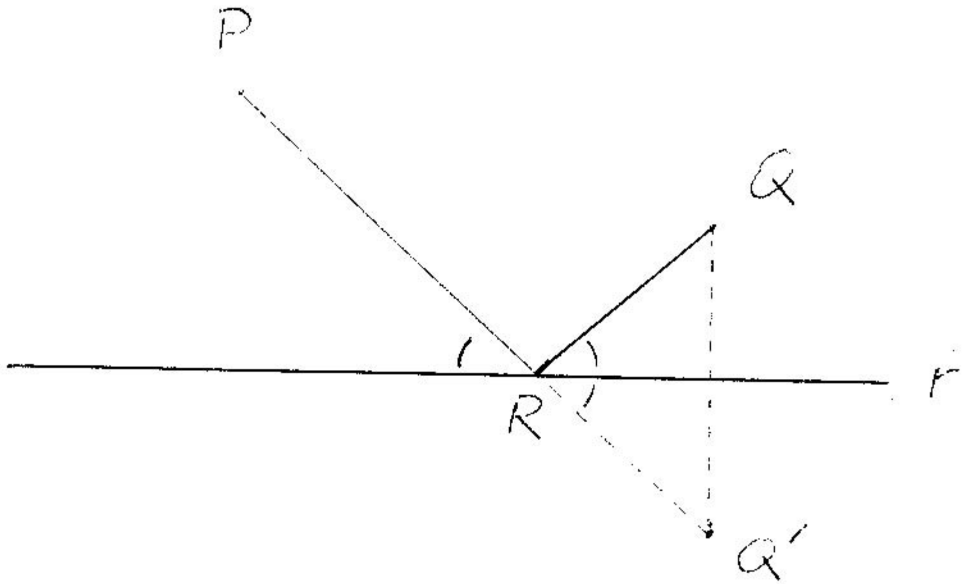
In particolare abbiamo esaminato la legge della riflessione su una "sponda" piana, a partire dal problema di Erone:



Qual è il punto R per cui $RP + RQ$ rappresenta il cammino più breve tra P e Q passante per r?

Riflessione

la soluzione “classica”:

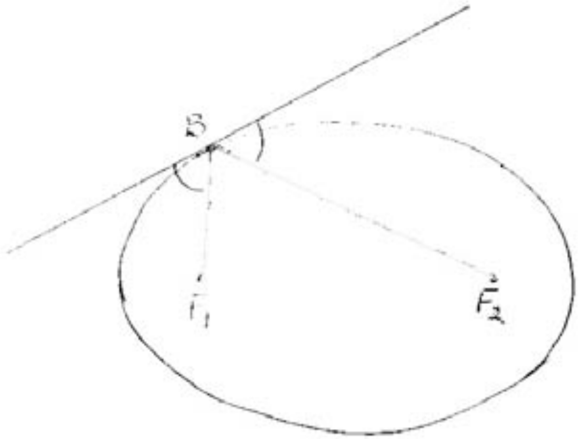


soddisfa la legge della riflessione (...*principio di Fermat*).

Fuochi: la discussione

Insegnante: "Come si può formulare la proprietà focale dell'ellisse che abbiamo visto "all'opera" nella bacinella ellittica durante la visita al museo di Priverno?"

Tommaso: "I segmenti che congiungono un punto dell'ellisse con i fuochi formano angoli uguali con la retta tangente all'ellisse che passa per quel punto".



Fuochi: la discussione

Insegnante: "Vogliamo dimostrarlo? C'è qualche analogia col problema di Erone?"

Francesco: "Dobbiamo sostituire la retta con l'ellisse, i punti *P* e *Q* con i fuochi F_1 e F_2, e cercare di dimostrare che il punto considerato, chiamiamolo *B*, è quello per cui la somma $BF_1 + BF_2$ è minima"

Charlie: "Ma quella somma è la stessa per tutti i punti dell'ellisse!"

Tatiana: "Secondo me basta dimostrare che il punto che risolve il problema di Erone per i punti F_1 e F_2 e per la retta tangente è proprio il punto *B*…"

Insegnante: "Come si può fare?"

Fuochi: la discussione

Marta: “Basterebbe provare che se Q è un punto della tangente diverso da B allora $QF_1 + QF_2 > BF_1 + BF_2$ ”

Francesco: “Ma questo è vero perché il punto Q è esterno all’ellisse!”

Insegnante: “Ma qui c’è un doppio problema. Occorre dimostrare due fatti che ci sembrano intuitivi:

- che i punti della tangente diversi da B sono esterni all’ellisse
- che la somma delle distanze dai fuochi di un punto esterno all’ellisse è maggiore di quella di un punto sull’elisse.”

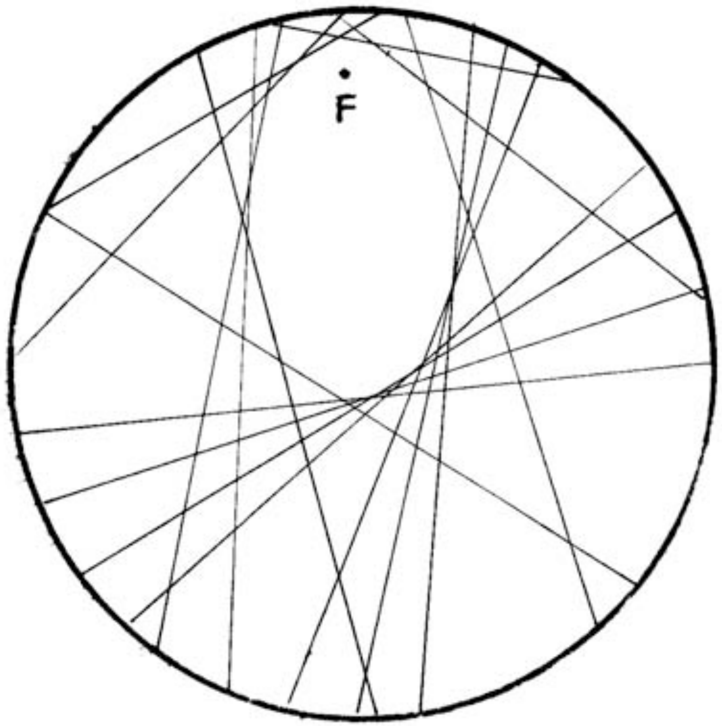
[…]

Inviluppi

Abbiamo fornito agli studenti, divisi in gruppi di tre o quattro, dei fogli di carta trasparente (o carta velina). Abbiamo chiesto ai ragazzi di tracciare un cerchio su un foglio e di fissare un punto F qualsiasi, ma non il centro, interno al cerchio. Abbiamo invitato gli studenti a piegare il foglio in modo che un punto della circonferenza passi per F , e quindi a ripetere questa operazione scegliendo punti diversi sulla circonferenza.

Inviluppi

Si ottiene un'ellisse come **inviluppo** delle piegature.



Quali sono i fuochi dell'ellisse?

Il punto *F* e il centro del cerchio.

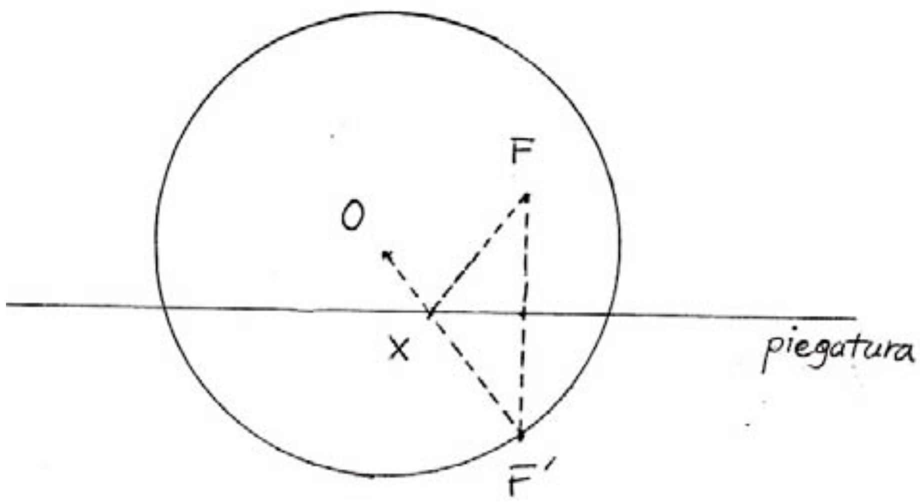
Come facciamo a provarlo?

Considera una piegatura.

Considera il punto F' simmetrico di F rispetto alla piegatura.

Unisci F' con il centro O della circonferenza e considera l'intersezione P di OF' con la piegatura.

Cosa osservi?



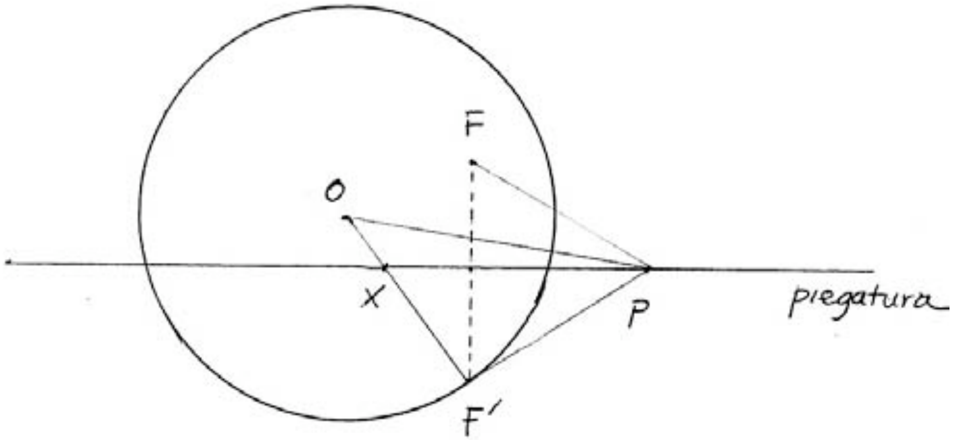
$$XF = XF'$$

$$XO + XF = XO + XF' = OF'$$

$$XO + XF = r$$

Inviluppi

Resta da dimostrare che la piegatura è una retta tangente all'ellisse. Basta provare che, a parte X, i punti della piegatura sono tutti esterni alla conica.



$$PF = PF'$$

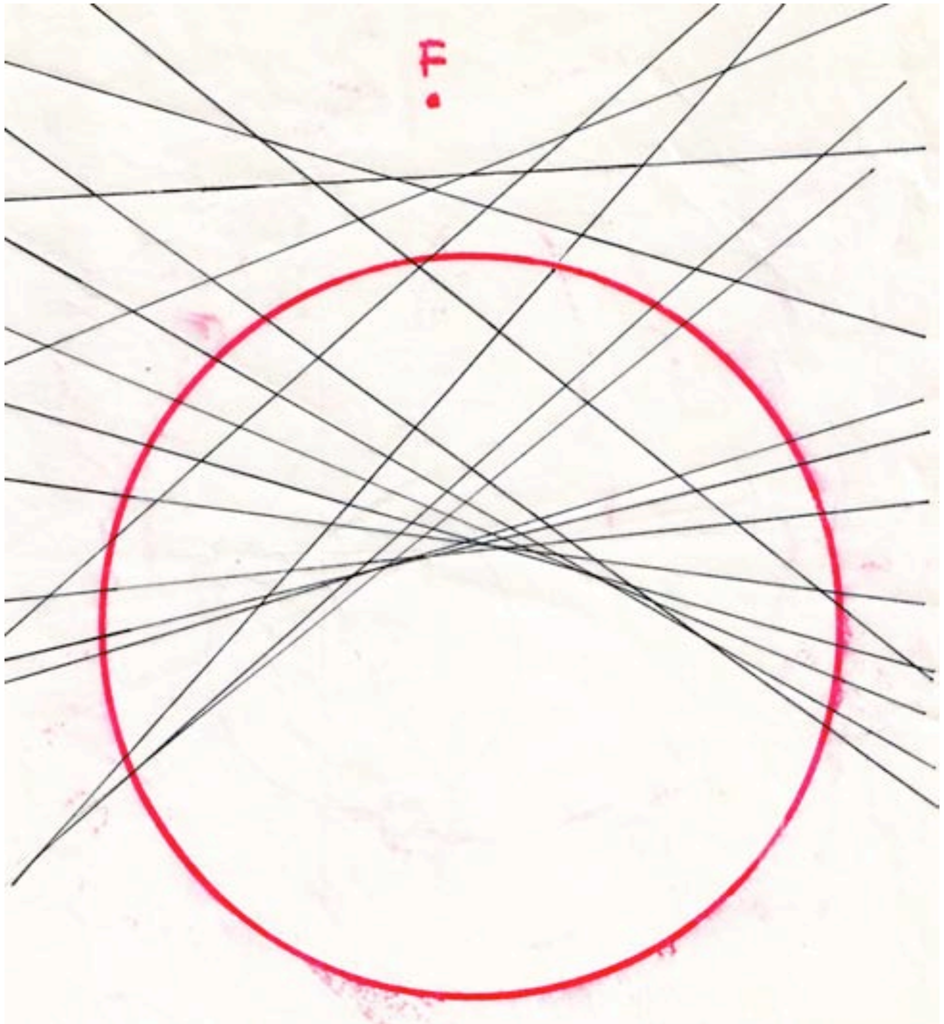
Nel triangolo OPF' :

$$PO + PF' > OF' = r$$

dunque:

$$PO + PF > r$$

Inviluppi



Inviluppi