PROPOSTE PER LA MATEMATICA NEL BIENNIO UNITARIO

Maurizio Berni

1. Quale matematica per il biennio unitario?

I recenti documenti allegati alla direttiva del 3 agosto 2007 (assi Culturali – Competenze)[1], relativi alle modalità di attuazione dell'obbligo scolastico, sono in continuità col dibattito in corso da diversi anni.

In particolare, nel 2003 sono stati elaborati due documenti importanti per la riflessione sull'educazione matematica: da un lato l'Unione Matematica Italiana (UMI), sollecitata a proporre un curriculum per la scuola superiore, ha prodotto un suo documento, denominato *Matematica 2003 - La matematica per il cittadino*[2]; dall'altro lato, un organismo sovranazionale, l'OCSE, aveva già commissionato nel 2000 una ricerca per valutare le competenze dei quindicenni dei Paesi membri nel campo della matematica, della lettura, scienze e *problem solving*[3]. La ricerca fu ripetuta nel 2003, e si ripete con cadenza triennale, ponendo l'accento, a rotazione, sulle diverse competenze. Nel 2003 fu posto l'accento sulle competenze matematiche. Il confronto tra questi due punti di vista, provenendo il primo da un ambiente prevalentemente accademico, ed il secondo da un organismo economico, espressione della società civile, conduce a formulare delle ipotesi di raccordo tra aspettative della società nei confronti della formazione, e in particolare di quella matematica, e ciò che il mondo della formazione ritiene utile fornire al cittadino e alla società, iniziando un percorso dialettico sui valori da condividere, quindi sugli obiettivi, e sulle strategie per raggiungerli. Ipotesi(prima era plurale) tanto più urgenti, in vista di un biennio unitario che sia occasione di crescita e non di frustrazione o, peggio, umiliazione, sia per una certa fetta di alunni, sia, come avviene in misura sempre crescente, per gli insegnanti.

Prima dei *valori*, vi è la condivisione di un *problema*, che è quello di sciogliere il dilemma tra *valore strumentale* e *valore formativo* della matematica. Nella prima frase della premessa del *Matematica 2003,* il prof. Arzarello, coordinatore del Gruppo di lavoro dell'UMI che ha prodotto il documento, esprime in maniera molto netta il proprio pensiero sullo scopo della formazione in generale: "L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica."

Dunque, abbiamo una visione *formativa* della matematica, non utilitaristica, seppure finalizzata ad uno scopo, quello più alto tra i tanti che si possono individuare.

Ma non dobbiamo pensare che questa sintesi sia frutto di una consapevolezza recente. Già Enriques, grande pensatore (matematico e filosofo) del secolo scorso, nel 1921 scriveva: "Quando, per esempio, si discute dei fini dell'insegnamento, contrapponendo uno scopo *utilitario* a uno scopo *formativo*, ovvero quando si tratta del valore delle Matematiche come mezzo per educare l'*intuizione* o la *logica*, mi pare che la veduta dinamica dello spirito non sia sempre presente davanti agli occhi."[4]
Nel periodo in cui Enriques esprimeva queste parole, nella scuola italiana le rinomate sezioni fisico-matematiche degli istituti tecnici stavano per essere smantellate per lasciare il posto ad un cosiddetto 'liceo scientifico', e la riforma Gentile, di lì a pochi anni, avrebbe fatto il resto, reintroducendo i dilemmi che la maturità intellettuale di Enriques e l'esperienza didattica delle sezioni fisico-matemtiche degli istituti tecnici avevano già ampiamente superato; l'eredità che ci viene lasciata da questo enorme passo indietro è che la riforma Gentile, e la filosofia che c'è dietro,

---

[1]Consultabili alla pagina http://web.math.unifi.it/users/gfmt/2007/2007.html
[2] Sito web http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
[3] Nel 2006 si è avuta una nuova rilevazione, che ha dato risultati del tutto simili alla precedente
[4] F.Enriques, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, serie IV, vol. I n.1, 1921

ci costringe a riguadagnare oggi la stessa chiarezza, che già Enriques aveva nel lontano 1921. Ecco un esempio di 'modernizzazione' negativa!

Torniamo dunque ai giorni nostri. L'altro documento che ho citato è il rapporto dell'OCSE del 2003 detto P.I.S.A., cioè *Program for International Student Assessment*. Si tratta, come dicevo, di un'indagine triennale, sulle competenze dei quindicenni (età minima media di uscita dalla scuola del'obbligo nei paesi membri) in tre discipline: la *lettura,* la *matematica* e le *scienze*, a cui si è aggiunto, nell'edizione 2003, il *problem solving* come abilità trasversale. Ciascun ciclo dell'indagine prevede un ambito 'principale'; quello del 2003 era proprio la matematica.

2. Analisi di un quesito

I singoli quesiti sono piuttosto complessi e articolati; essi introducono una situazione vera o verosimile, complessa, e propongono una serie di domande tra loro collegate; il contesto di senso è ricco e stimolante. I quesiti non misurano direttamente singole competenze, ma dei "raggruppamenti di competenze" ("*cluster of competencies*") che vengono messi in moto e si interfacciano tra loro per la soluzione di un *problema*, nel senso di una *situazione problematica* complessa e non banale (*problem solving*). Si può trovare tutto il materiale relativo alla ricerca sul sito dell'INVALSI alla pagina

http://www.invalsi.it/ric-int/Pisa2006/sito/pagine/documentazione.htm .

Vorrei qui limitarmi all'analisi di un quesito della tipologia proposta con riferimento agli aspetti seguenti:

a) Quali competenze occorrono per affrontarlo?
b) Quando e come dovrebbero essere state acquisite?
c) La formulazione del test e le competenze che occorrono per affrontarlo possono condizionare e in che modo il modo di fare matematica a scuola?

Il quesito scelto è il seguente:

> IL LAMPIONE[5]
>
> Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

2.1 Le competenze (e le aspettative).

Il piccolo parco triangolare (una forma non comune!) si astrae immediatamente ad un triangolo geometrico; il fatto che sia "piccolo", senza una quantificazione precisa della dimensione, è già spiazzante rispetto all'usuale linguaggio dei problemi di matematica presenti sui libri di testo; il lampione, di cui non si specifica l'altezza, si identifica con un punto. Per illuminare il parco (...ma ci sono alberi?) il lampione va messo in una posizione opportuna, ma non è detto che mettendolo in un'altra il parco non resti tutto illuminato: eventualmente cambia la qualità di questa illuminazione.

C'è dunque una prima fase, di "matematizzazione", in cui lo studente costruisce un modello mentale, ed effettua un lavoro di traduzione dal linguaggio naturale ("parco di forma triangolare") al linguaggio matematico ("triangolo"), che non è automatico, ma che prevede anche una selezione di

[5] Si tratta di un quesito presentato a titolo di esempio nella pubblicazione "PISA 2003 – VALUTAZIONE DEI QUINDICENNI", scaricabile dal sito dell'INVALSI già citato.

dettagli impliciti importanti e non (la parola “piccolo” viene praticamente ignorata) e un’interpretazione (“l’intero parco sia illuminato”, tradotto in “l’illuminazione sia la migliore possibile”). La traduzione può prevedere diverse fasi, diversi tentativi; per esempio un primo modello potrebbe essere costituito da un triangolo con un segmento (interno?) , raffigurante il lampione, perpendicolare al piano in cui giace il triangolo stesso. Occorre già una certa astrazione per capire che la soluzione del problema *non dipende* dall’altezza del lampione (se non ci sono alberi nel giardino), e quindi il lampione può essere pensato come *un punto* (nel triangolo?).

Ora che abbiamo un triangolo ed un punto, c’è ancora qulacosa di fisico che non è stato ancora tradotto nel linguaggio matematico: la *luce.* Anche qui occorre fare delle ipotesi, per poter dire che “l’illuminazione sia la migliore possibile”. Come si propaga la luce nello spazio? Se il lampione è idealizzato come una sorgente di luce puntiforme, il modello ‘naturale’ è quello di una propagazione in linea retta, quindi di una serie di semirette di luce che partono dal punto che rappresenta il lampione.

Il problema, più o meno coscientemente formalizzato, diventa quello di trovare la posizione del punto L (il lampione) in modo che esso abbia la minima distanza possibile da tre punti dati A, B e C (i tre vertici del giardino triangolare). Se le tre distanze non sono uguali, non tutti gli angoli del parco ricevono la stessa illuminazione, cosa che non vogliamo; quindi il problema diventa:

Trovare un punto L equidistante da A, B, C. Esiste un tale punto? E’ unico?

E’ un classico problema di geometria: il punto esiste ed è unico; si tratta del circocentro del triangolo, ovvero il centro della circonferenza circoscritta.

Focalizzando l’attenzione unicamente sui contenuti, il circocentro sembra essere l’unico prerequisito per affrontare il problema.

Ma c’è di più: una volta ‘svelato’ l’argomento matematico soggiacente, il problema appare come risolto; ... ma non è così per gli estensori della ricerca, che accludono al testo del problema il seguente commento:

“Questo problema pratico può essere risolto seguendo la strategia generale usata dai matematici, a cui si farà riferimento con il termine “matematizzazione”. La matematizzazione può essere definita sulla base di 5 aspetti.
Partire da un problema reale.
Occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione.
Strutturare il problema in base a concetti matematici.
Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l’illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione al centro.
Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).
Il problema viene riformulato in: “localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo”.
Risolvere il problema matematico.
Poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio.
Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.
La soluzione trovata viene applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco. Occorre anche

riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica."(Op. cit. pag. 31).

Si tratta quindi di un'attività molto complessa e articolata, di cui certamente sfuggono anche alcuni aspetti (fatto ineludibile quando si vuol riportare una realtà 'analogica', complessa, ad una 'misurazione', per sua natura 'digitale'); per esempio perché dare per scontato che una soluzione che prevede un lampione fuori dal parco debba necessariamente essere scartata? Le opere più geniali non sono forse quelle in cui l'autore (l'artista, lo scienziato,...) si avvale di una libertà di scelta creativa che il 'senso comune' scarterebbe? Da qui l'imporanza dei criteri di valutazione e lo smascheramento dei suoi possibili 'assiomi' impliciti, che rischiano di essere puramente dei pregiudizi che misurano il grado di conformismo.

C'è un altro aspetto da sottolineare: rischia di sfuggire al disciplinarista, che tenderebbe a focalizzare solo l'aspetto contenutistico collegato al problema, la necessità della fase 5, che pur la società richiede ad un cittadino che si serve di studi matematici: ricollocare la soluzione trovata nella realtà e confrontarla con essa; quante volte invece i matematici sono considerati 'fuori dalla realtà', privi di senso pratico, talvolta privi di gusto estetico?

Se gli estensori della ricerca sono credibili portavoce delle aspettative della società civile verso i matematici, e quindi verso gli effetti dell'educazione matematica, dobbiamo prendere atto e, come insegnanti di matematica, farci carico delle parole iniziali del commento sopra riportato: "(...) *Questo problema pratico può essere risolto seguendo la strategia generale usata dai matematici, a cui si farà riferimento con il termine "matematizzazione". La matematizzazione può essere definita sulla base di 5 aspetti.(...)"*

E' una frase impegnativa, perché non *richiede* che l'educazione matematica porti a dominare tutti e cinque gli aspetti descritti, ma *dà per scontato* che queste cinque fasi facciano parte di una "(...) strategia generale *usata* dai matematici(...) [il corsivo è mio]". Ignorando forse quale sia la reale attività dei matematici, la società li *vede* come se effettivamente si occupassero di tutto questo, quasi come degli ingegneri.

Ecco che il dibattito sul valore utilitaristico o formativo dell'educazione matematica esce ancora da queste parole; alcuni matematici sarebbero pronti a sdegnarsi o a sorridere di questo punto di vista; altri (quelli 'applicati') a sentire una sorta di 'rivincita' verso i cosiddetti 'puri': 'figli di un dio minore', ma più richiesti dalla società.

2.2. Quando e come?

La seconda domanda che ci siamo posti è: "Quando e come"? *Quando* il quindicenne avrebbe dovuto imparare dell'esistenza e unicità del circocentro di un triangolo, e *come* avrebbe dovuto farlo per far sì che questo contenuto rientrasse nell'ambito di una *competenza* spendibile nell'attività di risoluzione di problemi?

Preliminarmente, occorre osservare che questo contenuto è previsto dagli estensori dei problemi; sebbene gli estensori dichiarino che le competenze siano valutate "(...) solo secondariamente, in relazione a elementi del curricolo (quali, ad esempio, i numeri, l'algebra e la geometria)(...)", riconosciamo un contenuto molto preciso che *secondo le scelte personali di molti colleghi o maturate all'interno dei dipartimenti o gruppi disciplinari nelle nostre scuole superiori, può anche essere escluso*. Entreremo nel merito dei probabili motivi di questa esclusione più avanti; per ora limitiamoci a prendere atto che un organismo internazionale non certo incline ad una visione pura ed astratta della matematica prevede che il quindicenne medio di un paese dell'OCSE conosca il circocentro di un triangolo, e la sua posizione nei vari casi (triangolo acutangolo, rettangolo, ottusangolo).

Il contenuto quindi c'è; ora chiediamoci: il modo in cui viene "richiamato" dal problema proposto lascia intedere la metodologia con la quale questo contenuto è stato presumibilmente trasmesso? La risposta è certamente 'no', nel senso 'orizzontale' delle possibili opzioni metodologiche (metodi 'tradizionali', con apprendimento a forte componente mnemonica; metodi 'innovativi', come lo sperimentare con un *software* di geometria dinamica,...); ma in senso 'verticale', di profondità ed efficacia, dobbiamo ammettere che per risolvere quel problema l'argomento non può essere passato davanti alo studente 'per sentito dire': qualunque metodo sia stato utilizzato, si suppone che abbia avuto una certa efficacia; un'efficacia tale da far sì che questo studente sia in grado di ricostruire mentalmente un'immagine dinamica (soprattutto nella fase 5) che attivi 'spontaneamente' una specie di 'dialogo interno' tra l'"ingegnere" e il "committente", sull'efficacia della soluzione matematica.

Ma come far sì che si possa raggiungere una tale efficacia?

Il discorso forse va leggermente spostato: la ricerca, un po' astratta, di un insegnamento 'efficace', rispetto ad ogni criterio di misura, forse non ha molto senso; diciamo piuttosto che, anche se alcune competenze sono "malferme" nella mente di un ragazzo, la capacità di un quesito di "metterle in moto", di metterle alla prova dei fatti, può portarle ad un livello più alto di quanto in realtà non fossero all'inizio della soluzione del quesito.

E qui nasce un sospetto: l'esito di una buona prestazione è solo indice dell'efficacia dell'insegnamento, o non c'è piuttosto un'influenza dell'osservatore, un'efficacia del problema nel *motivare* il ragazzo ad usare i propri strumenti cognitivi, strumenti peraltro in perenne costruzione e ristrutturazione? Si ritrova anche nella didattica quel "principo di indeterminazione" che ha permesso alla fisica classica di uscire dall'illusione del determinismo e di evolversi in nuove direzioni.

Dunque, non c'è un *come* insegnare separato e "misurato oggettivamente" dalle prove di verifica, ma c'è un *come insegnare* e *come porre problemi* che è un tutt'uno; e il porre problemi non è confinato alla verifica; anzi sarebbe quasi assurdo verificare con la richiesta di risolvere problemi un insegnamento che non procede per problemi; il *problem solving* è un'attività trasversale presente continuamente nell'apprendimento: l'efficacia dei problemi sta nella capacità di evocare dei contenuti, ma anche di 'richiederne' di nuovi alla mente del ragazzo; in questo modo i contenuti 'passano' come strumenti di risoluzione di problemi, e sono già 'testati' come tali; è ragionevole aspettarsi che siano già disponibili come strumenti per problemi nuovi, molto di più di contenuti appresi in modo espositivo, di cui non si è mai sentita la necessità.

Il modello è quello dell'*apprendistato cognitivo*, in analogia alla bottega artigiana[6]: al giovane apprendista non vengono spiegati a parole gli usi di tutti gli strumenti della bottega, ad uno ad uno, fuori dal contesto di senso degli oggetti compiuti che con questi attrezzi si possono costruire; tali strumenti, senza tante parole, saranno utilizzati dall'esperto sotto l'osservazione dell'allievo che 'ruberà il mestiere con gli occhi' per la voglia di 'costruire'; con gradualità l'allievo si cimenterà in compiti via via più complessi per un obiettivo concreto (e non per dar prova di sé magari costruendo oggetti privi di valore; sarebbe piuttosto umiliante e demotivante); non sarà difficile in tale contesto convincere l'apprendista dell'utilità degli strumenti della bottega; anzi sarà proprio la fatica del loro mancato utilizzo, o di un utilizzo non appropriato, ad affinarne via via la capacità d'uso.

2.3. I test OCSE PISA possono condizionare il modo di fare scuola?

[6] Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G.: [1994], *L'algebra come strumento di pensiero; analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderno 6 del CNR, Progetto strategico ITD, Pavia.

Ogni valutazione esterna che evidenzi una carenza del fare scuola può condizionare l'insegnamento in una misura che è forse proporzionale alla credibilità che il mondo della scuola attribuisce al valutatore.

Nel caso dell'indagine OCSE-PISA, collocate in un ambito ragionevole le riserve sulla visione utilitaristica della matematica, e preso atto che comunque i quesiti 'attivano' conoscenze care anche a chi escluderebbe dall'insegnamento della matematica i suoi aspetti pratici, occorre ammettere che la critica, implicita nel risultato complessivamente negativo raggiunto dal nostro paese, richiede un forte ripensamento della disciplina, nella sua struttura didattica.

Naturalmente, la reazione ad una critica può essere informata alla *performativity*, cioè a quella degenerazione del mito della *performance* che piega ogni sforzo al raggiungimento del risultato, indipendentemente da una riflessione pedagogica che metta anche in discussione, almeno in parte, la prova e il valutatore stesso, la cui autorità così diventa assoluta. Ma, accettando questa reazione, si perderebbe l'identità (e anche la dignità) professionale, si perderebbero di vista dei principi, che vanno sì messi in discussione, ma mai calpestati e sacrificati sull'altare della produttività e del risultato ad ogni costo.

L'altra reazione, più faticosa e avara di risultati immediati, è quella di una riflessione che metta in discussione dialettica risultati, valutatori, princìpi pedagogici, valori, in un'ottica di studio critico e di *ricerca-azione*.

Un aspetto innegabile dei test è la loro collocazione in un ambito reale o realistico, e la loro capacità, tuttavia, di richiamare concetti teorici, e di metterne alla prova la comprensione e la competenza d'uso. Probabilmente, per ripensare la disciplina in questi termini, occorre ripercorrere tutta la frattura che l'ideale gentiliano ha creato nella formazione scientifica, e riscoprire in che modo nei 'regi istituti tecnici' di fine ottocento, e inizio novecento, questa possibilità che stiamo solo riscoprendo era patrimonio culturale acquisito (ed espresso con le chiare parole dell'Enriques).

2.4 Mettere in moto competenze logiche già presenti

In particolare, la *teoria delle intelligenze multiple* di Howard Gardner[7], e le "narrazioni nella scienza" di Bruner ([Br], cap. 6) mostrano come l'intelligenza, intesa come capacità di risolvere e porsi problemi (e sottolineo 'porsi', e non solo 'risolvere'), *è fortemente condizionata nella sua efficacia dal contesto nel quale è chiamata in causa*; questa 'risposta' varia da soggetto a soggetto, ma sono possibili delle classificazioni che permettono di 'tipizzare' la sollecitazione.

Secondo Bruner, l'approccio *narrativo*, tipico di materie come la storia o la letteratura, è estremamente importante anche nella scienza, e in particolare nella matematica.
La componente narrativa può attivare in modo naturale strutture di pensiero logico, come dimostra il *test delle carte di Wason* (1966), nella versione modificata nel 1982 da Griggs e Cox (Vedi Appendice 1)[8].

Abbiamo ripetuto l'esperimento in alcune classi prime di scuola superiore[9], e i risultati sono confermati: vi è una grande variabilità nell'efficacia d'uso di strutture logiche del pensiero, a seconda dei contesti che le richiamano.

---

[7]H. Gardner: *Formae mentis. Saggio sulla pluralità dell'intelligenza* [1983], Feltrinelli, Milano, 1987
[8]L'idea di usare il test nelle due versioni, e di mettere comunque in discussione la capacità 'diagnostiche' dei test, sulle quali influisce l'osservatore con le sue interpretazioni, è tratta dal libro di Rosetta Zan "Difficoltà in matematica: Ossevare, interpretare, intervenire", Springer, Milano, 2007.
[9] Il test, già ampiamente provato, non aveva bisogno di una ulteriore conferma; del resto quella su numeri così piccoli non avrebbe potuto esserlo; abbiamo però voluto sperimentare questo tipo di sollecitazione sui nostri studenti, confidando in un effetto benefico per il loro rapporto con la disciplina.

Dunque, se uno studente fallisce la soluzione di un problema, *non possiamo inferire* che lo studente *non possieda* la struttura logica necessaria alla soluzione; possiamo solo dedurre che la formulazione *di quel determinato* problema *non ha attivato* nello studente, per motivi che vanno indagati, quelle strutture logiche alle quali non siamo riusciti ad accedere come valutatori.

La sfida allora è quella di *trovare problemi efficaci* nell'attivare le strutture logiche esistenti, come precondizione per esercitarle e rafforzarle. La versione modificata di Griggs e Cox del test delle carte di Wason è proprio un esempio di come *le stesse* strutture logiche possano essere richiamate con diversa efficacia in diversi contesti; in particolare, risulta molto più efficace un contesto di tipo narrativo.

Se è vero che l'esperienza motoria, tramite la manipolazione attiva e interrogativa dell'ambiente circostante (...'porsi' problemi...), è fondamentale per la formazione dei concetti matematici, allora dobbiamo ammettere che questi concetti, atemporali nella loro astrazione, hanno una 'storia', una costruzione mentale, che è storica e temporale.

Anzi la vera illusione è la natura apparentemente atemporale dei concetti, i quali, una volta che vengono considerati astratti, 'asciugati' dalla realtà da cui provengono, sono visti come fissati ed immutabili. Niente di più illusorio e dannoso per il pensiero matematico: esistono diversi gradi di astrazione, ed un'astrazione di primo livello può dirsi compiuta solo quando sia possibile *reificare* gli oggetti astratti[10] come 'concreti' in un nuovo mondo di idee; questo non è altro che il primo gradino di un processo che non ha mai fine; e l'operazione in sé della conquista di successivi livelli di astrazione è personale e temporale. L'astrazione non è un unico accesso ad un mondo staccato dalla realtà, ma un processo dinamico di passaggio su più livelli, la cui storia si intreccia col vissuto (anche emotivo) di chi la compie.

L'opportunità, nella didattica della matematica, della riscoperta della sua collocazione storica, è una delle espressioni di questo bisogno di recupero della dimensione temporale; non è un bisogno specifico di fare 'storia della matematica', come si può verificare quando si trattano testi antichi che si soffermano su particolari che oggi ci sembrano astrusi o banali; è piuttosto l'espressione di un bisogno diverso, che ha in comune con la storia la dimensione temporale; una dimensione temporale che deve essere adattata ad un bisogno di 'storia soggettiva' della scoperta matematica.

La 'storia soggettiva', come insegna Freudenthal, ha un forte legame con quella 'oggettiva', seppure nei limiti descritti dall'Autore: "Oggi sappiamo ben poco di come si sviluppa il pensiero nell'individuo, ma possiamo imparare molte cose dallo sviluppo dell'umanità. I ragazzi dovrebbero ripetere il processo di apprendimento dell'umanità, non come è effettivamente avvenuto, ma come sarebbe avvenuto se i nostri antenati avessero conosciuto un po' di più delle cose che noi oggi conosciamo." ([F], pag. 75).

E' come se il riferimento storico fosse sì importante, per entrare in un contesto in cui il problema matematico trae il suo significato, ma può essere poi abbandonato per intraprendere una propria storia personale, verosimile, che mantenga il senso e la motivazione del problema.

3. La geometria nel biennio: sì o no?

L'eccessiva attenzione al *come* rispetto al *che cosa* rischia di sterilizzare la riflessione sul *perché*, cioè sulla motivazione delle scelte dei contenuti.

---

[10] Si veda a tale proposito l'articolo on-line all'indirizzo http://poisson.phc.unipi.it/~cerulli/seminari/sfard/sfard.html .

Dare una eccessiva preminenza al *come* sul *che cosa* è un processo degenerativo, che porta all'illusione di poter fare *tutto a tutti*, grazie a metodologie innovative (che sono di là da venire).

Un altro atteggiamento pericoloso è quello a cui si è assistito con l'introduzione della cosiddetta *matematica moderna*: sono stati introdotti *contenuti nuovi* in un periodo storico in cui si cercavano *metodi nuovi*, resi necessari dalla scolarizzazione di massa. Questa coincidenza ha fatto sì che molti fossero portati a ritenere che vi fosse un legame stretto fra innovazione metodologica e scelta di certi contenuti; implicitamente questo significava mettere in discussione non tanto i metodi con cui venivano affrontati i contenuti tradizionali (sarebbe stato molto faticoso, forse troppo?), ma i contenuti stessi.

Abbiamo assistito alla comparsa (e alla successiva scomparsa) dell'insiemistica, pomposamente denominata "teoria degli insiemi": di teorico, eccetto un esasperato nominalismo spesso privo di coerenza interna, c'era ben poco; si è pensato per anni che si trattasse di un contenuto che avrebbe veicolato una nuova metodologia; eppure l'insiemistica poteva esasperare atteggiamenti metodologici tra loro opposti: da una parte l'applicazione brutale all'insegnamento della corrente di pensiero matematico più formalista, quella del *bourbakismo*, dall'altra l'acquisizione di un linguaggio trasversale, utile per esprimere concetti matematici e non solo (si pensi a tutta l'attività classificatoria e ordinatoria caratteristica di tutte le discipline, dalle scienze sperimentali alla grammatica: queste attività possono essere inquadrate negli schemi delle relazioni d'ordine e di equivalenza tra insiemi).

Alla geometria è toccata una sorte per certi versi analoga, per altri peggiore; analoga nel senso che anche alla geometria si è attribuita la caratteristica intrinseca di veicolare un metodo; la differenza, rispetto all'insiemistica, è che qui non si tratta di un "metodo innovativo possibile", ma di un metodo tradizionale consolidato: essa è stata considerata per secoli la palestra per la costruzione del pensiero razionale, *quindi richiede* un alto formalismo; ma questo approccio dà scarsissimi risultati sui grandi numeri, *dunque* la scelta più saggia è sembrata essere quella di *eliminare* il problema alla radice: interi gruppi di dipartimento disciplinare nelle scuole superiori deliberano di *eliminare* la geometria, attribuendo la fiducia nella capacità di sviluppare il pensiero formale a materie "più attuali", quali ad esempio l'informatica.

Ecco un'altra confusione: non è più un contenuto che pretende di veicolare "di per sé" nuove metodologie, ma uno strumento, un artefatto, complicato e costoso, coerentemente con la cultura consumistica di cui siamo ormai pervasi: il computer. Eppure anche qui si possono prendere direzioni opposte: un'informatica etica e consapevole, che partendo dai principi democratici dell'*Open Source* apre opportunità di confronto, a chiunque abbia interesse, con la comunità scientifica, senza più barriere geografiche o di ruolo; oppure un'informatica sciocca e consumistica che partendo dal principio opposto, quello dei brevetti, delle *royalties* e del divieto di *reverse engineering*[11] crea caste intoccabili di pochi "detentori dei linguaggi", come gli antichi scribi egiziani, e movimenta capitali immensi da soggetti pubblici (che usano danaro pubblico, cioè soldi prelevati dai cittadini) verso un unico soggetto privato monopolistico: cosa c'è in comune tra questi due destini?

Comunque sia, lo spostamento di un problema non significa risolverlo, ed ecco che l'insegnamento dell'informatica, da "linguaggi di comando e linguaggi di programmazione. Utilizzazione di un linguaggio di programmazione. Riflessione sugli errori: sintassi e semantica."[12], scade a "Utilizzare i principali pacchetti standard (Word Processor, Foglio Elettronico, Presentazioni, ecc.)"[13], che dell'informatica come disciplina è una grottesca e sbiadita immagine: insegnanti laureati si riducono ad introdurre nelle ore di matematica elementi di una cultura pratica

[11] cioè l'attività di decifrare il codice sorgente dei programmi eseguibili
[12] dai programmi PNI del biennio, reperibili su http://www.dm.unipi.it/fim/PNI_biennio.htm
[13] dagli OSA (per fortuna rimasti sulla carta) della riforma Moratti per il secondo ciclo.

fine a se stessa che studenti ‘smanettoni’ possono acquisire più velocemente da soli, snobbando e talvolta ridicolizzando il docente che vi si impegna dibattendosi con una certa deprimente inutilità.

Anche qui, si è ripresentato il problema che era stato solo spostato, e si sono dovute eludere le stesse difficoltà per le quali la geometria euclidea era stata scartata: quelle del ragionamento logico-deduttivo.

E’ molto interessante a questo proposito il paragone (vedi Appendice 2) di un gruppo di insegnanti con un un’*equipe* medica che assegna medicine a dei pazienti senza fare diagnosi, perché queste sono ‘buone per sé’, ma davanti all’evidenza della loro inefficacia, rinunciano a curare il male per il quale i pazienti si erano ricoverati, cambiano cura assegnandone un’altra qualsiasi, e dimettono i pazienti quando questi risultano guariti da un male che non hanno mai avuto.

Nello stesso modo, se un giorno, nel nostro passato, abbiamo scelto di proporre attività di geometria euclidea, e ci siamo convinti che questa fosse una buona strada per sviluppare le capacità logiche, non può essere l’insuccesso della nostra didattica a convincerci che allora di queste facoltà logiche gli allievi non hanno più bisogno! ... E che quindi si li possa ‘dimettere’ (diplomare, nel nostro linguaggio), sottoponendoli ad altri tipi di 'cure' (come l'ECDL), di cui magari non hanno bisogno, ma rispetto alle quali risultano ‘sani’; così facendo si nasconde, come la polvere sotto il tappeto, la realtà che i nostri allievi non imparano a ragionare.

Dobbiamo metterci nei panni di quei buoni medici che invece di prendersela con il “paziente non collaborativo” (“non si impegna”, diciamo noi), o l'inefficacia di un farmaco, capiscono che la risposta a quel farmaco è soggettiva, e sta a noi, come specialisti, modificare le dosi o le sostanze in modo da raggiungere l’efficacia terapeutica verso quella malattia che *deve comunque essere curata*.

4. Un percorso storico-narrativo di geometria euclidea.[14]

Costruire un triangolo o un quadrato su un foglio di carta a quadretti con un righello *non è un problema*, *non ha senso*; aggiungere a priori, dall’alto, delle regole, tipo “usando riga e compasso” continua a non avere senso, soprattutto quando si sovrappongono contesti, come la quadrettatura del quaderno, o la graduazione della riga, che rendono la richiesta incomprensibile: occorre prima di tutto un foglio bianco; ora il problema di usare riga e compasso ha più senso, ma ancora sfugge perché, avendo a disposizione un quaderno a quadretti, un giorno l’insegnante decide di farne a meno e di imporre la fatica di un disegno su un foglio bianco; e soprattutto, perché mai non si possono fare quadrati misurando i lati con la graduazione del righello, oppure seguendo i quadretti della pagina... perché mai bisogna usare il compasso per riportare segmenti uguali, quando posso vedere con la riga *quanto misurano*?

4.1. Geometria euclidea piana: il primo capitolo.

Se sfogliamo le prime pagine di un qualsiasi libro di geometria, troviamo che essa trae la sua origine dall’esigenza pratica di ristabilire i confini dei campi dei contadini dopo le periodiche inondanzioni del Nilo; è quanto ci tramanda lo storico Erodoto.

L’informazione di limita ad un semplice aneddoto; dopo di che si gira pagina e si inizia con uno pseudoformalismo (spacciato per formalismo, grazie alla presenza di termini tecnici spesso non definiti o definiti in modo illusorio o circolare) che recide i legami con questa motivazione iniziale e costringe il cervello di chi apprende ad una sottomissione completa ai criteri di validazione del libro di testo e dell’insegnante (non sempre coincidenti) su che cosa è formale e cosa no, quali oggetti richiedano una definizione e quali no, quali ragionamenti siano accettabili e quali no.

[14] L’esperienza, ancora in corso, è stata condotta in una classe prima di un istituto tecnico agrario.

Più che una palestra di ragionamento, è una palestra di conformismo e di sottomissione ad un'autorità, o peggio a più autorità non sempre in accordo tra loro, indipendentemente dalla coerenza interna delle richieste: sono entrambe caratteristiche nocive per lo sviluppo del pensiero critico, e matematico in particolare.

Alain Connes, uno dei più grandi matematici contemporanei, dice:

> "*The scientific life of mathematicians can be pictured as a trip inside the geography of the "mathematical reality" which they unveil gradually in their own private mental frame. It often begins by an act of rebellion with respect to the existing dogmatic description of that reality that one will find in existing books. The young "to be mathematician" realize in their own mind that their perception of the mathematical world captures some features which do not quite fit with the existing dogma. This first act is often due in most cases to ignorance but it allows one to free oneself from the reverence to authority by relying on one's intuition provided it is backed up by actual proofs. Once mathematicians get to really know, in an original and "personal" manner, a small part of the mathematical world, as esoteric as it can look at first, their trip can really start.*"[15]

E' vero che A. Connes si riferisce ai matematici di professione; ma allora dobbiamo chiederci:

> La ribellione creativa è privilegio dei matematici, e agli altri restano solo i dogmi della matematica, oppure è una necessità umana e come tale deve essere perseguita per tutti?

4.2 Rileggiamo il primo capitolo di geometria rispettando i bisogni mentali degli allievi

Se abbiamo deciso che l'atto del ragionare correttamente è un bisogno essenziale dell'essere umano, e riteniamo la medicina denominata "geometria euclidea" adatta almeno per iniziare la terapia (forse anche perché non ne conosciamo al momento di migliori), prima di tutto non bisogna confondere il fatto che il 'paziente' ritenga pregiudizialmente la medicina 'amara' come l'espressione di un rifiuto talmente profondo da dover sospendere immediatamente la cura; né cadere nell'illusione pedagogica di un approccio esclusivamente ludico e privo di fatica[16]: se l'uomo desidera opporsi all'entropia (e l'uso della sua intelligenza è un'opposizione all'entropia, è come il risalire della corrente da parte del salmone), è naturale che senta la fatica, una fatica che bisogna motivare ad attivare nell'ottica del raggiungimento (quasi mai immediato) di un risultato desiderato, senza lasciarsi demotivare dalla frustrazione per l'attesa[17]

Naturalmente, il contenuto è solo il "principio attivo" della medicina; occorre poi una posologia, da adattare ai singoli pazienti, ossia, nel nostro linguaggio, una metodologia appropriata.

Nessuno può pretendere di avere una ricetta infallibile, tuttavia possiamo individuare nelle difficoltà dei nostri studenti molti errori della didattica tradizonale: il più grande di tutti, come abbiamo visto, è *presentare problemi che non sono problemi*.

---

[15] "La vita scientifica dei matematici può essere descritta come un viaggio attraverso la geografia della "realtà matematica" che essi disvelano gradualmente all'interno della loro cornice mentale personale. Essa spesso trae inizio da un atto di ribellione rispetto alla dogmatica descrizione della realtà che si trova sui libri già scritti. Il giovane "matematico in essere" realizza all'interno della propria mente che la sua percezione del mondo matematico cattura alcune caratteristiche che non si confanno coi dogmi esistenti. Questo primo atto è dovuto nella maggior parte dei casi a ignoranza, ma permette di liberarsi dalla soggezione verso l'autorità, facendo fede sulla propria intuizione, quando essa poggia su nuove dimostrazioni. Quando il matematico giunge veramente a conoscere, in una maniera originale e "personale", una piccola parte del mondo matematico, per quanto esoterico possa apparire all'inizio, il suo viaggio può veramente cominciare."; [A], ftp://ftp.alainconnes.org/maths.pdf

[16] Come disse Euclide al sovrano Tolomeo I: "Non esiste una via regale che porti alla geometria"

[17] Si veda a tale proposito l'articolo di Michele Pellerey "Volli, sempre volli, fortissimamente volli", su Orientamenti Pedagogici, n. 40 (1993), pp.1005-1017.

4.3 Un contesto plausibile.

Proviamo allora, in un contesto storico verosimile, a identificarci in qualcuno dei personaggi coinvolti nella ridefinizione dei confini dei campi inondati dal Nilo; in particolare in un gruppo di contadini coi campi confinanti e in uno scriba, o notaio, che deve convincere con certezza e autorevolezza della bontà dei suoi metodi per mettere d'accordo gli interessi contrapposti dei contadini, e, in più mettere d'accordo gli interessi dei contadini coi campi erosi dalle inondazioni del Nilo, con quelli del Faraone, che imponeva una tassa proporzionale all'area coltivabile.

In questo contesto, ha senso il problema di 'costruire', per esempio, un quadrato sul terreno. Come ha senso individuare un campo quadrato somma di due campi quadrati (magari perché ricevuti in eredità). Un terreno limaccioso è cosa ben diversa da un foglio di carta quadrettata. La costruzione del quadrato deve essere fatta in un modo da convincere *tutti* i contadini, i quali possono essere pensati come 'ignoranti' su questioni geometriche, ma che, grazie ad un interesse vitale, e non 'astratto', sono motivati a diventare 'esperti', e sempre più esigenti nel giudicare l'esattezza delle costruzioni dello scriba; il funzionario, a sua volta, avrà sempre più autorevolezza quanto più le sue costruzioni non avranno carattere estemporaneo, ma saranno 'tipizzate' secondo un protocollo codificato, con valore giuridico, espresso con un linguaggio specifico appropriato, *il cui rigore si costruisce secondo necessità e non per imposizioni astratte*.

4.3 I dati iniziali e gli strumenti.

Costruire un quadrato sul terreno limaccioso, ma *come* e *con che cosa*? Intanto dobbiamo avere un dato di partenza, una dimensione, per esempio la lunghezza del lato. Ma la dimensione è espressa in che modo? Tutti noi, anche adulti, anche adulti esperti, tendiamo a ragionare implicitamente con una sovrastruttura sulle figure geometriche, quella della 'misura', riferendoci ad unità codificate, come il metro: *questo atteggiamento costituisce un ostacolo alla comprensione della struttura razionale della geometria euclidea*; leggendo le fonti scopriamo infatti che in tale costruzione la teoria della misura compare ad uno stadio piuttosto avanzato, grazie alla sensibilità logica e didattica di Euclide, che giunge alla dimostrazione del teorema di Pitagora *senza* parlare di misure, ma solo di somme e confronti di grandezze omogenee[18]. Avendo alle spalle anni di attività geometriche basati su calcoli (pur necessari!) di aree e volumi, gli allievi che giungono al biennio superiore, coi loro quaderni a quadretti, e con le loro teste piene di formule e di convinzioni su che cosa è la geometria, non possiedono la disposizione mentale per giungere spontaneamente alla progressiva spoliazione di cui necessitano i fondamenti della geometria euclidea. Occorre dunque simulare una situazione di *confronto* tra le prime *grandezze* individuate nella geometria: i *segmenti*.[19] Il discorso si intreccia con quello degli strumenti: le *corde*.

Nell'introduzione alla mostra "Oltre il compasso", di Franco Conti ed Enrico Giusti, troviamo le seguenti parole: "Le testimonianze degli storici greci vogliono che la geometria (letteralmente: misura della terra) sia nata in Egitto. Dice Erodoto: <<Dicevano che questo re [Sesostri, ca. 2000 a. C.] distribuì il territorio fra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma quadrata, e che in base a questa suddivisione si procurava le entrate, avendo imposto il pagamento di un tributo annuo. Se da un podere il fiume asportava una qualche parte, il proprietario, recatosi presso il re, gli segnalava l'accaduto: egli allora mandava funzionari che osservavano e misuravano di quanto il terreno era divenuto più piccolo, affinché per l'avvenire il

[18] Al contrario di quanto è stato suggerito nei piani di studio personalizzati, i quali prevedono che il teorema di Pitagora sia trattato *dopo* il concetto di misura di una grandezza; purtroppo questo suggerimento è ribadito nell'allegato "Assi Culturali" al documento tecnico sulla sperimentazione dell'elevamento dell'obbligo scolastico, come si può vedere alla pagina web http://web.math.unifi.it/users/gfmt/2007/all1_assiculturali.pdf

[19] In realtà si tratta di classi di equivalenza di segmenti (modulo la congruenza) secondo la visione moderna; Euclide non è esplicito in questa distinzione, e mantiene questa ambiguità che sembra non nuocere rispetto al rigore che gli è proprio; nuoce invece il tentativo maldestro di svoraccaricare la snella trattazione euclidea con 'pezze' moderne, quale l'introduzione precoce dei numeri reali.

proprietario pagasse in proporzione il tributo. Io ritengo che in seguito a ciò sia stata inventata la geometria e sia poi passata in Grecia.>> Se poi il fiume aveva semplicemente cancellato i confini dei campi, era compito degli stessi funzionari ristabilire le giuste divisioni. Gli agrimensori egizi erano chiamati "arpedonapti", annodatori di funi. E tirando le funi essi tracciarono le due linee più semplici e più importanti della geometria: la retta e il cerchio. La prima, semplicemente tendendo una fune tra due punti, un'operazione di cui resta ancora un'immagine nelle espressioni "tirare una retta", "tirare una perpendicolare"; il secondo, facendo ruotare uno di questi attorno all'altro che rimane fisso."[20]

Dunque, supponiamo che il nostro contadino abbia conservato una corda della lunghezza del lato del suo campo, oppure più lunga, ma con dei nodi che segnano questa lunghezza, oppure più corta, potendola disporre su tratti consecutivi ed allineati grazie anche all'uso di opportuni picchetti.

Il problema allora diventa:

Come costruire un quadrato sul terreno, avendo a disposizione unicamente delle corde, con un lato di lunghezza uguale a quella di una corda data?

4.4 Il passaggio al foglio con la riga e il compasso

Volendo simulare la costruzione sul terreno con la costruzione su un foglio (bianco e possibilmente di forma circolare o coi bordi irregolari), con delle vere cordicelle, risulta estremamente naturale la sostituzione delle cordicelle stesse con strumenti più semplici da usare: la *riga* e il *compasso*. La riga però, come sostituto della corda, viene usata nella sua versione euclidea, cioè come strumento per tirare righe dritte, e non per misurare[21]. La riga e il compasso non sono dunque frutto di un capriccio, ma strumenti per la soluzione di un problema pratico: l'estrema difficoltà di usare delle vere corde.

4.5 Il problema della perpendicolare e la ricerca di definizioni.

In questa fase del 'gioco' si osserva un reale coinvolgimento da parte dei ragazzi. La messa a fuoco della vera natura del problema è graduale, ed avviene in tempi diversi; essa, tuttavia, accende un dibattito. Nasce un antagonismo: "Non mi fido della tua costruzione" "...chi mi dice che..." proprio come i contadini che possiamo immaginare interessati delle loro proprietà davanti ai notai. Le locuzioni si allungano; si perde il loro controllo sintattico per rincorrere quello semantico, i ragazzi inciampano nello sforzo di allineare il linguaggio con le intuizioni, a volte si correggono da soli; ricercano nella memoria alcuni termini che condensino le locuzioni troppo lunghe in parole singole: è la 'nascita' delle definizioni.

La necessità di 'raccontare' come si è giunti ad un risultato potenzia il ruolo del linguaggio come strumento per risolvere un problema espositivo; il linguaggio assume un ruolo totalmente diverso, e spesso più gratificante, di quello che si gioca nel dialogo asimmetrico tra insegnante e alunno; la *definizione* non è una richiesta 'con secondi fini' dell'insegnante, che già la conosce; ma una necessità dell'alunno per eliminare 'giri di parole' nell'esposizione ai compagni che devono essere convinti; per questo motivo è naturale che tenda ad essere *essenziale* e non ridondante (

[20] Da "Il Giardino di Archimede – Un museo per la matematica"; sezione "La geometria delle curve: un percorso storico", pagina web http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/curve/curve_giusti/prima.php?id=0

[21] L'uso euclideo del compasso, invece, che consiste nel richiudere lo strumento dopo ogni utilizzo, ci sembra una raffinatezza, priva di una immediata ricaduta didattica, che può essere al momento ignorata ed eventualmente ripresa in momenti successivi (Cfr. prop. I,2 di [E], e relativi commenti).

E’ per sostenere questo dialogo, è per rispondere a queste domande che gli studenti si interrogano tra loro; il bisogno di ‘convincere’ attiva un ragionamento che mette in moto delle sequenze logiche, ognuno secondo le proprie capacità del momento, che sono comunque sollecitate.

L’insegnante è pronto a ‘far finta di non capire’ le istruzioni proposte dai ragazzi; finché vi ritrovi tracce di ambiguità, tende ad interpretarle non nel modo in cui essi le intendono, ma in qualcun altro dei possibili modi coerenti con il modo in cui sono state espresse; tutto ciò restando entro il limite della loro capacità di ‘reggere’ la frustrazione; in caso di scarsa resistenza, l’obiettivo deve essere differito, e occorre prendere atto di questo nuovo e diverso problema da affrontare.

In tutto ciò che precede il ruolo del linguaggio assume un valore preminente; un linguaggio tecnico specifico che non viene scimmiottato in modo insensato e insicuro in un clima velatamente inquisitorio, ma reinventato ed utilizzato con una finalità positiva e propositiva (quella di esprimere le proprie intuizioni)[22].

4.6. Il problema è risolto.

Quando si lascia un compito aperto, e questo è stato ben compreso ed è stato assunto da parte dei ragazzi come un ‘loro’ problema, vengono fuori diverse soluzioni; alcune errate, alcune corrette e fantasiose, altre corrette e un po’ complicate, e, con una certa frequenza, vengono fuori le soluzioni che ci si aspetta.

La soluzione che abbiamo sintetizzato e adottato è la seguente (pur ammettendo che non è l’unica possibile)[23]:

FASI	COMMENTI
Si traccia il segmento AB della lunghezza fissata	- Dare un nome ai punti è parso molto vantaggioso; indicare col dito e dire “questo” non è sembrato un buon modo per comunicare; - si prende atto che i segmenti possono essere ‘trasportati’
Si prolunga AB da una parte (p.es. B) di un segmento qualsiasi BC	- i segmenti possono essere prolungati a piacere da entrambe le parti [questo risulterà essere il postulato II di Euclide]
Si costruisce una circonferenza di centro B e raggio BC, che incontra il segmento AB in un punto D	- Dati un punto e un segmento, è possibile tracciare la circonferenza che quel punto come centro e quel segmento come raggio [questo risulterà essere il postulato III di Euclide]

[22] A proposito del ruolo del linguaggio nell’apprendimento della matematica, si può vedere lo studio di Pierluigi Ferrari (Università del Piemonte Orientale) presentato in occasione del Seminario Nazionale di Didattica della Matematica, che si è tenuto a Pisa nei giorni 5-7 febbraio 2004; l’intervento è pubblicato in rete alla pagina http://www.mfn.unipmn.it/~pferrari/SN.htm.

[23] Per esempio, la “costruzione della retta perpendicolare ad un segmento dato” riportata sui libri di disegno tecnico è spesso diversa; evidentemente non è la più naturale.

Con apertura CD, puntando alternativamente su C e su D, si tracciano due circonferenze, che si incontrano in due punti E ed F: la retta EF è perpendicolare ad AB nel punto B	Il punto finale della costruzione, ormai convincente per tutti, è punto di partenza per molte domande a cui gli studenti non sanno dare risposta: - Perché il punto B è allineato con E ed F? - ...ma perché EF è proprio perpendicolare? - Si potevano prendere aperture diverse del compasso o l'apertura CD è obbligata? - ....

4.7 Qualche tentativo di giustificazione

La risposta alle prime due domande è davvero difficile in questo momento. Ma *che cosa significa essere perpendicolari*? Significa formare degli angoli retti; ma *perché quegli angoli costruiti in quel modo risultano proprio retti*?

Euclide spesso dimostra l'uguaglianza di angoli passando attraverso l'uguaglianza di triangoli; espone e dimostra (o ritiene di dimostrare) i tre famosi criteri di uguaglianza, in un certo ordine logico che non corrisponde all'ordine naturale di 'scoperta' (vedi il paragrafo successivo), e li utilizza ripetutamente dimostrando molti teoremi. Ma non è affatto spontaneo il metodo con cui Euclide mette in atto questo passsaggio, e non dobbiamo stupirci delle prevedibili resistenze da parte degli studenti; ribadisco, non si tratta di 'non capire', ma di resistenze ad accettare quel tipo di ragionamento, probabilmente molto fondate.

Da una riflessione approfondita sul *concetto di angolo*, della sua evoluzione nella mente dell'allievo, e delle sue relazioni con gli altri enti geometrici, primo fra tutti il triangolo, ci accorgiamo infatti di molte incogruenze linguistiche insite nelle convenzioni adottate; a questo proposito, occorre un'analisi onesta delle contraddizioni concettuali che lo pseudorigore terminologico di un'esposizione scolastica spesso pretende di far accettare: l'angolo, se è "una parte di piano delimitata da due semirette aventi l'origine in comune", e quindi una porzione illimitata di piano, non può certo essere 'contenuto' in un triangolo! Tuttavia parliamo disinvoltamente di "angolo interno al triangolo", e l'uguaglianza tra figure limitate come i triangoli come può garantire (almeno nella mene dell'alliveo che sta imparando) l'uguaglianza tra figure illimitate che vengono chiamate "angoli interni", ognuno dei quali in realtà *contiene* il triangolo stesso?[24]

4.8 Quanti e quali elementi occorre confrontare per poter decidere se due triangoli sono uguali?

In ogni caso, quello dei criteri di uguaglianza dei triangoli è un passaggio naturale per una costruzione logica della geometria; anch'essi rispondono ad un preciso problema:

Quanti e quali elementi occorre confrontare, come minimo, per poter decidere se due triangoli sono uguali?

Che si può riformulare in una forma più concreta e strumentale:

Quanti e quali elementi occorre assegnare per poter costruire un 'certo' triangolo?

Qui la locuzione "un certo triangolo" ha il significato, implicitamente accettato nel linguaggio comune, di una classe di triangoli congruenti. In modo abbastanza naturale dalla

[24]Si veda il libro di Vinicio Villani "Cominciamo dal punto", Pitagora ed., Bologna, 2006, in particolare il cap. 13: "Cosa si intende per angolo? E perché questa nozione presenta tante difficoltà?"

discussione in classe (esiste il triangolo? E' unico? Come si disegna?) emergono i tre criteri di uguaglianza, la disuguaglianza triangolare, il fatto che la somma di due angoli non può superare l'angolo piatto; l'ordine tipico con cui i criteri emergono dalla discussione è generalmente il seguente:

- 3° criterio: costruzione di un triangolo dati tre lati assegnati; scoperta della disuguaglianza triangolare
- 1° criterio: tentativo di costruire un triangolo con un angolo e due lati assegnati; scoperta che se l'angolo non è quello compreso tra i due lati il triangolo da costruire potrebbe non essere unico
- 2° criterio: tentativo di costruire un triangolo con un lato e due angoli assegnati; scoperta che se il lato non è quello compreso tra i due angoli non si riesce a costruire il triangolo, ma non si può escludere che esista

4.7 Il problema della doppia perpendicolare: perché è parallela?

Per proseguire nella costruzione di un quadrato, occorre procedere alla costruzione di una seconda perpendicolare: sulle due perpendicolari, dalla stessa parte rispetto al segmento AB, si riportano poi segmenti uguali al lato, e si uniscono i punti ottenuti: il quadrato è infine costruito.

- ...ma che cosa è davvero un quadrato?
- perché quell'ultimo lato è uguale agli altri?
- perché gli angoli adiacenti all'ultimo lato costruito risultano anch'essi retti?
- ...e poi, perché le due perpendicolari al segmento AB sono parallele tra loro? Può darsi che si intersechino in qualche punto lontano?

Siamo così già arrivati al 'limite' della cosiddetta *geometria assoluta*, cioè di quella parte della geometria che non richiede l'uso del V postulato di Euclide: questo punto di confine è costituito dal *teorema delle parallele,* che in una delle sue molteplici forme equivalenti si può formulare nel modo seguente:

Due rette sono perpendicolari ad una stessa retta se e solo se sono parallele tra loro.

Come sappiamo questo teorema si colloca a cavallo del V postulato: un'implicazione (perpendicolari ad una stessa retta sono parallele tra loro) non lo richiede, ma sfrutta quel 'teorema dell'angolo esterno in forma debole' la cui dimostrazione è oggetto di critica moderna[25]; il viceversa invece è equivalente al quinto postulato.

Spingere già in questa direzione oppure soffermarsi su ulteriori esperienze di geometria assoluta, oppure ancora spingere in altre direzioni, come il teorema di Pitagora non formalizzato (vedi par. 4.10) è una scelta didattica; personalmente ho optato per la seconda strada: aumentare le esperienze di geometria assoluta, con un percorso di scoperta e 'dimostrazione' delle proprietà del rombo (par. 4.9). Vorrei però a questo punto fare una digressione.

4.7 Quadrato o quadrilatero di Saccheri?

Abbiamo detto che questa attività si colloca a cavallo del V Postulato; e se questo postulato non valesse? In effetti abbiamo costruito un *quadrilatero di Saccheri*[26], cioè un quadrilatero con tre lati consecutivi, di cui quelli opposti uguali, e i due angoli compresi retti; possiamo dimostrare (anche in classe) che gli altri angoli sono uguali, ma si aprono tre possibilità su di essi:

[25] Si veda per esempio M. J. Greenberg, "Euclidean and Non-Euclidean Geometries, New York: W. H. Freeman, 1993; pp. 96-97.
[26] Si veda Villani, op. cit. pag 53.

- sono entrambi acuti (*ipotesi dell'angolo acuto*);
- sono entrambi retti (*ipotesi dell'angolo retto*);
- sono entrambi ottusi (*ipotesi dell'angolo ottuso*).

Saccheri ritenne di poter dimostrare che le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso portavano ad un assurdo, e quindi di aver costruito un quadrato; la sua dimostrazione era corretta nel caso dell'angolo ottuso, ma per quella dell'angolo acuto, non si accorse di avere scoperto una geometria non euclidea (*iperbolica*): all'interno di essa il suo quadrilatero *non* era un rettangolo; nella figura seguente si può vedere un quadrilatero di Saccheri nel modello iperbolico di Klein.

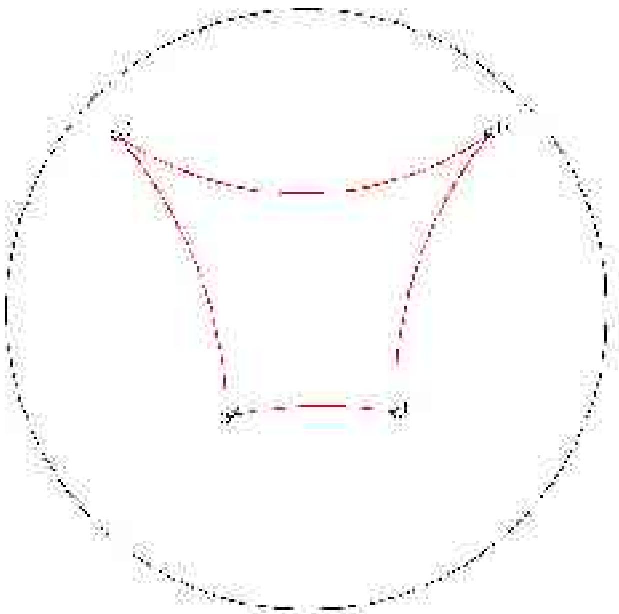

Fig. 1: Il quadrilatero di Saccheri nel piano iperbolico

4.9 Il rombo e la geometria assoluta.

La narrazione non finisce, ma si sposta sugli enti astratti (come fanno i matematici...): una 'ricerca' in classe sulla definizione e sulle proprietà del rombo costituisce un esempio di ri-costruzione della disciplina, generalmente diversa da quella proposta nei libri di testo.

Secondo un'impostazione 'classica', infatti, il criterio con cui sembra procedere lo studio della geometria piana è quello del numero dei lati dei poligoni: prima i triangoli, poi i quadrilateri, infine i poligoni con più lati; il cerchio, coi suoi 'infiniti lati puntiformi', rappresenta la fine di tutto il percorso. In realtà, già dalle prime costruzioni geometriche con riga e compasso, compaiono cerchi, quadrilateri...; emerge tra essi, da subito, un poligono interessante: il *rombo*. Un percorso precoce sulla definizione e le proprietà del rombo, che rispetta l'ordine della sua comparsa nelle costruzioni geometriche, permette di lavorare intensamente sui triangoli (criteri di uguaglianza, proprietà del triangolo isoscele) e mostra come i teoremi e le relative dimostrazioni si 'incastrino' in una teoria, con un ordine che non possiamo scegliere a priori, ma che è vincolato dalle interdipendenze logiche tra le varie proposizioni che via via si formulano.

ATTIVITA' PROPOSTA: E' stato chiesto agli allievi di

- Scrivere che cosa è un rombo.

Le definizioni sono state messe a confronto: ci si è accorti in molti casi che alcune parti delle definizioni proposte erano pleonastiche; ma allora perché qualcuno ha insistito nel mantenerle? Non è che forse il ‘dire più cose di quelle che servono’ è un’attività che riceve un irragionevole rinforzo nell'ambiente scolastico, secondo il principio che “più cose dici, e più cose mostri di sapere, più sei considerato bravo”?

- Elencare le proprietà del rombo che ricordavano o che riuscivano a individuare.

E’ stato interessante notare qui come i concetti di ‘definizione’ e ‘proprietà’ fossero ancora fusi nella mente degli allievi all’inizio dell’attività, e come piano piano, e con tempi diversi, in diversi casi si distaccavano.

- Provare a darne una dimostrazione.

Quest’ultima richiesta è stata data a gruppi, senza un rigido obiettivo didattico a breve termine, ma con la finalità di osservare quali ragionamenti dei singoli gruppi fossero convincenti per gli altri compagni. La fatica di questa ricerca di dimostrazioni convincenti ha rinforzato la necessità di separare le definizioni dalle proprietà: più la definizione è breve, e minore è la quantità di cose da dimostrare. Naturalmente tutto ciò non veniva percepito razionalmente; si trattava di un insieme di stati di necessità che si creavano in misure diverse e in tempi diversi nelle menti degli allievi, con diversi gradi di consapevolezza.

4.9 Ulteriori ipotesi di lavoro: La somma di quadrati è un quadrato? Il teorema di Pitagora e ancora regole del gioco

Anche il teorema di Pitagora può essere inserito in un contesto storico-narrativo, in un momento dell’attività didattica che non è rigidamente determinato. Si può anche pensare di porlo all'inizio del percorso, magari presentandolo con un problema pratico, come quello dell'eredità, per poi andare a ritroso: “Ma come si costruisce un quadrato?”. Il problema dell'eredità è quello di un contadino egizio che, avendo ricevuto per eredità un campo quadrato molto lontano dal suo, chiede al funzionario del Faraone di poter avere un campo quadrato equivalente alla somma dei due, troppo scomodi da lavorare entrambi.

Nei libri di testo il teorema di Pitagora si trova dopo molti capitoli; è consuetudine collocare il suo studio al secondo anno, in concomitanza con l’introduzione del concetto di *grandezza* (grandezze omogenee e loro misura); un argomento sottile e complesso che crea un certo disagio perfino al docente.

Ma a nostro avviso un’attività precoce sul teorema di Pitagora è quantomai importante come *strumento per comprendere* la geometria razionale, e non come punto quasi di arrivo di una geometria razionale che si pretende ormai compresa (dopo averla svuotata delle esperienze significative!); del resto, una collocazione precoce rispetta il percorso storico della geometria: fu scoperto, e in qualche modo dimostrato, diversi secoli prima della formalizzazione di Euclide; anzi, secondo lo Zeuthen, fu proprio la necessità di dimostrare il teorema di Pitagora, non immediatamente evidente, a creare i presupposti per quella che Egli definisce la *géométrie propre*[27].

Si può introdurre il teorema di Pitagora con il seguente problema:

[27]Si veda a questo proposito l'articolo di M.Berni e L.d'Angelo “Da Pitagora agli assiomi”, Insegnare, n. 5/95, pp. 47-51

“Un contadino egiziano riceve in eredità due appezzamenti di terreno di forma quadrata; desidera cambiarli in un unico appezzamento quadrato equivalente; sappiamo che lo scriba Ahmes, a cui il contadino si è rivolto, ha ricostruito su un terreno demaniale i due quadrati adiacenti su un lato, come in figura 1:

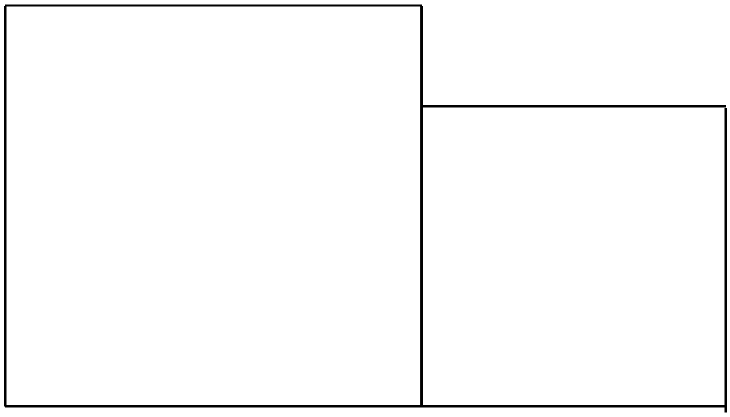

Fig. 2: i due quadrati vengono accostati

Poi, lo scriba ha individuato sul lato del quadrato grande un segmento uguale al lato di quello piccolo, e da lì ha tracciato due linee, come in figura 2:

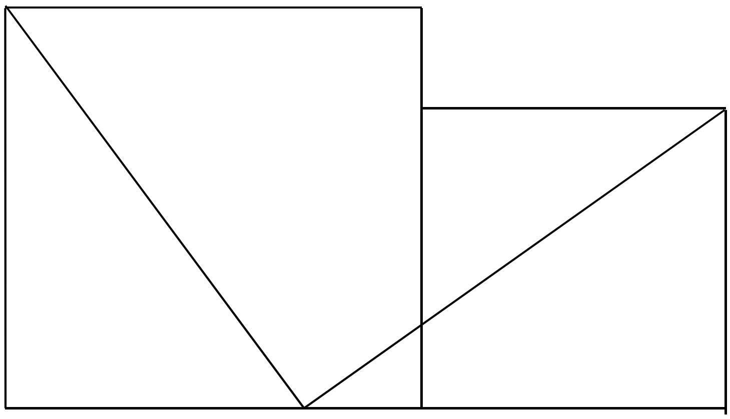

Fig. 3

Purtroppo non vi sono tracce di come lo scriba Ahmes andò avanti. Come possiamo immaginare che avesse proseguito?”

Naturalmente, dopo aver ‘intuito’ la soluzione, che è data ruotando i due triangoli come in figura 3, occorre costruirla *seguendo le regole imposte dagli strumenti a disposizione*; la descrizione di queste istruzioni, e la loro giustificazione via via più ‘fine’, fanno sì che si esercitino in modo ‘costruttivo’ il linguaggio e il metodo della geometria razionale.

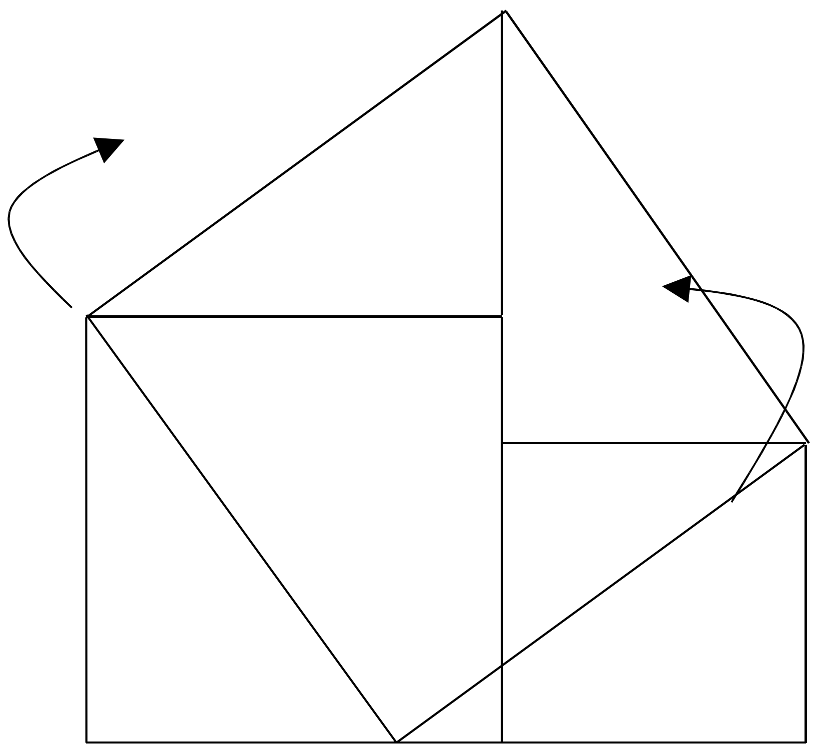

Fig. 4

4.10. Qualche puntualizzazione di logica classica: il ruolo di Aristotele in Euclide, e la sistemazione della geometria pre-euclidea (Pitagora, Talete).

Per quanto sia affascinante far emergere, con metodo maieutico, le strutture logiche già presenti nel pensiero, come nel test modificato delle carte (Appendice I), vi è sempre il rischio incombente che sulla fatica del ragionamento prevalga l'appoggiarsi ad un'autorità esterna per validare i processi di costruzione delle varie figure.

Quello che secondo le nostre regole del gioco deve diventare un *protocollo giuridicamente fondato*, può invece trasformarsi per alcuni in una serie di regole di cui si perdono col tempo la motivazione e il senso; con questo stile, per esempio, sono descritte le costruzioni geometriche nei libri di testo di disegno tecnico; in alcuni di essi non viene neanche evidenziata la distinzione tra costruzioni esatte ed approssimate: con un linguaggio pseudoformale vengono elencate le fasi della costruzione, e 'come per magia' appariranno le costruzioni volute.

E' in questa fase che l'insegnante deve vigilare e fare dei passi indietro, tutti quelli necessari per ricostruire la trama del ragionamento. Ma non basta. Euclide ha avuto, pochi decenni prima di scrivere gli Elementi, un importante impulso culturale, l'ultimo di una lunga serie: Aristotele. Il grande filosofo scrisse, tra l'altro, un trattato di logica, quella *logica aristotelica* su cui ancor oggi poggia la matematica, e che allora dette ad Euclide l'impalcatura su cui costruire l'edificio geometrico nella sua forma ipotetico-deduttiva.

E' come se, oltre che di geometria e di 'buon senso' logico innato, sia stato storicamente necessario un ragionamento riflessivo, un'analisi sul modo di ragionare, l'esplicita individuazione di regole logiche che certamente erano già da tempo utilizzate in modo naturale e forse inconsapevole.

In quest'ottica un discorso in classe sulla logica proposizionale, in particolare sulle equivalenze logiche, è quanto mai proficuo, proprio perché è la formalizzazione di un lavoro 'grezzo' che viene sperimentato su uno specifico settore (la geometria), e non un vuoto discorso sulle tavole di verità dei connettivi proposizionali staccato da contesti significativi.

Questo, in fondo, è ciò che è avvenuto storicamente: due capisaldi della geometria furono scoperti ed utilizzati dapprima in modo 'intuitivo':

- il teorema di Talete (con la teoria ingenua delle proporzioni)

- il teorema di Pitagora (con la scoperta dell'incommensurabilità).

Essi dettero una spinta propulsiva per due secoli di geometria a metà strada tra il teorico e il pratico; questa geometria, dopo una forte e compiuta riflessione logica da parte di Aristotele, ebbe con Euclide una prima sistemazione razionale, tanto bella quanto imperfetta.

E a scuola non possiamo fare di più: non hanno senso lo pseudorigore, lo scimmiottare forzato di frasi che si ammantano di specialismo grazie alla presenza di termini tecnici che calano dall'alto, termini spesso privi di una definizione coerente; non ha senso la ripetizione pedissequa e acritica di dimostrazioni[28] sulle quali solo la critica moderna può permettersi delle obiezioni, mentre lo studente, 'comune mortale', deve limitarsi a credervi ciecamente e disciplinatamente.

5. La critica ad Euclide e la sua influenza nella didattica

Parlando coi ragazzi, incuriositi da alcune nozioni che sono stati obbligati a ripetere senza comprenderle, è emersa talvolta la domanda: "Ma professore, è vero che le rette parallele si incontrano all'infinito?"

Oppure "Che cosa sono le rette convergenti e divergenti?" Continuo a stupirmi per queste domande; è come se l'evoluzione dei rami più avanzati della geometria moderna fosse in qualche modo penetrata, non si capisce come e in che modo e a quale scopo, nella didattica elementare.

Le rette che s'incontrano all'infinito, come due binari rettilinei visti in prospettiva, sono certamente immagini coinvolgenti della geometria proiettiva, e immagini ancor più misteriose sono le rette divergenti della geometria iperbolica di Bolyai e Lobatchevski (di quelle convergenti non ho alcuna cognizione: forse inventate dagli autori dei testi per restituire una certa simmetria alla nozione non euclidea di parallelismo?).

Fu proprio a seguito delle geometrie non euclidee, e della scoperta di Klein di modelli 'concreti' che vincolano la validità di quelle geometrie a quella euclidea (a dispetto del loro nome), oltre alla tendenza alla formalizzazione di varie branche della matematica (l'aritmetica, l'analisi, la logica e la teoria degli insiemi), che si rese necessaria una rifondazione della geometria euclidea; essa venne portata a termina da D. Hilbert nei primi anni del '900.

[28] mi riferisco in particolare alle dimostrazioni dei criteri di uguaglianza dei triangoli e a quella del teorema dell'angolo esterno in forma debole.

E’ con un certo stupore che ritroviamo alcuni degli assiomi di Hilbert nei testi scolastici, mescolati con quelli euclidei; mentre si critica l’astrazione del modello euclideo, scopriamo consultando le fonti originali che in realtà i nostri alunni non si stanno scontrando con la difficoltà di comprendere Euclide, ma Hilbert. Lasciare una traccia nei testi scolastici degli esiti di una critica moderna incomprensibile, saltando a pié pari tutto il travaglio di idee che hanno richiesto millenni per dipanarsi in quella chiarezza astratta, è una scelta di cui temo non si valutino fino in fondole conseguenze.

6. La geometria euclidea piana come contesto di senso per l’algebra elementare.

Negli Elementi di Euclide compare la prima *algebra*, intesa come struttura su cui poter fare delle operazioni: quella dei *segmenti.* I segmenti possono essere sommati tra loro, moltiplicati per un numero intero (somma ripetuta) o razionale (grazie ad una costruzione che poggia sul teorema di Talete); possono addirittura essere moltiplicati tra loro, in due sensi: il primo è quello del calcolo di un’area (oggi lo chiameremmo *prodotto esterno*) e l’altro invece è: dati due segmenti a e b, trovare l’altezza del rettangolo di base unitaria equivalente a quello di dimensioni a e b; in questo secondo senso si tratta di un’*operazione interna.*

Quella dei segmenti è una struttura algebrica le cui caratteristiche sono assunte all’inizio implicitamente (i segmenti sovrapponibili sono indistinguibili e quindi identificati), e via via esplicitate, fino a ‘richiedere’ (‘postulare’ nel senso euclideo) anche quelle proprietà che inizialmente non valgono, come la possibilità incondizionata di effettuare sottrazioni; l’evoluzione naturale è il concetto di *vettore* e, infine, di *spazio vettoriale*.

L’immediata trasferibilità dell’algebra dei segmenti in quella delle lettere consiste nel fatto che i segmenti nella geometria euclidea non vengono *misurati* ma *denotati*; ad essi non è naturale quindi associare un *numero fissato*, ma un *numero qualsiasi*, cioè quell'oggetto che oggi denotiamo con una *lettera*. Le operazioni sui segmenti, e le loro proprietà, definiscono allora analoghe operazioni e proprietà tra i loro *nomi*, cioè tra lettere; in definitiva, *la geometria euclidea può costituire un contesto di senso per l’algebra elementare*.

7. Fare geometria euclidea senza i teoremi di Euclide.

La dimostrazione del teorema di Pitagora presente negli Elementi di Euclide *non utilizza* i cosiddetti “teoremi di Euclide[29]”, per il semplice fatto che tali teoremi non esistono nel primo libro; la dimostrazione presente nei nostri manuali è forse dovuta al matematico arabo Nassir el Din, vissuto intorno al XIII secolo[30]. I due “teoremi di Euclide” sono impliciti nella proposizione VI, 8, e solo nel X libro (lemma precedente la prop. 33) si mostra il legame con il teorema di Pitagora.

Euclide, alla fine del secondo libro degli Elementi (quindi molto dopo la dimostrazione del teorema di Pitagora), riporta un bel problema di costruzione, riconducibile a ciò che noi oggi chiamiamo “II teorema di Euclide”:

Costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo dato.

Dato il rettangolo ABCD, Euclide dice di riportare le due dimensioni AB e BC allineate sul segmento AC’ (vedi figura), e di costruire la semicirconferenza di diametro AC’. Prolungando BD dalla parte di D e intersecando con la circonferenza si ottiene il punto H: HD è il lato del quadrato cercato: basta applicare il II teorema di Euclide; ma, visto che questo teorema non è ancora stato enunciato negli Elementi, come ha fatto Euclide a giustificare la costruzione?

---

[29] I teorema di Euclide: *“In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l’ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull’ipotenusa”*;
II teorema di Euclide: *“In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’altezza relativa all’ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull’ipotenusa”*.
[30] Si può consultare il sito http://www.fisicamente.net/index-1552.htm; data dell'ultimo accesso: 2/10/07.

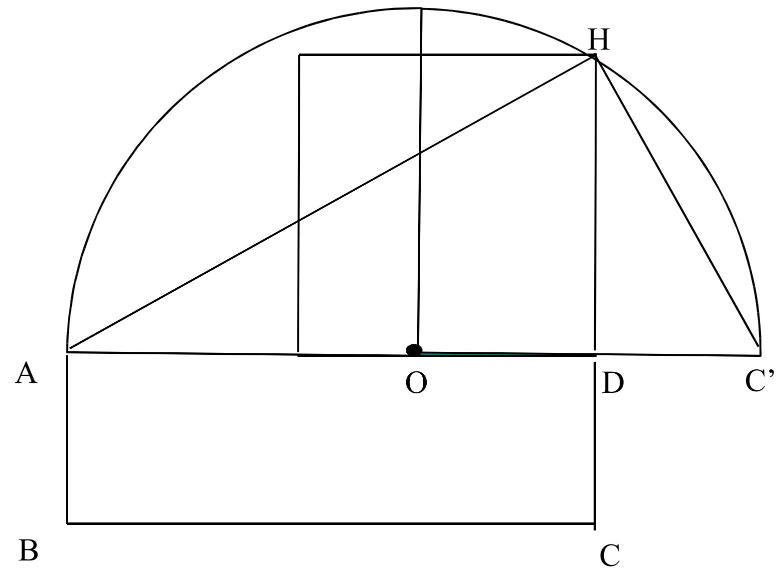

Fig. 5: HD è il lato del quadrato equivalente al rettangolo dato

8. Algebra, geometria e isoperimetri.

Per giustificare la costruzione del quadrato equivalente, Euclide utilizza un'altra proposizione, sempre del libro secondo, che è formidabile nella sua valenza semantica: essa lega algebra, geometria, e nello stesso tempo risolve un problema isoperimetrico:

Dividendo un segmento in due parti uguali e due disuguali, il quadrato costruito su una della parti uguali è equivalente al rettangolo costruito su quelle disuguali, più il quadrato costruito sul segmento che unisce i due punti di suddivisione.

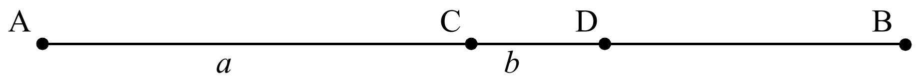

Fig. 6: Il segmento AB è suddiviso nelle parti uguali AC e CB e in quelle disuguali AD e DB

Se chiamiamo *a* la lunghezza delle parti uguali e *b* la lunghezza del segmento CD, che unisce i punti di suddivisione, l'enunciato del teorema equivale al seguente:

$$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2,$$

a sua volta equivalente ad un famoso *prodotto notevole*, che viene proposto nel corso di algebra

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

La rilevanza semantica dell'approccio euclideo a questo prodotto notevole consiste nel riconoscere in questa formula (o in quella equivalente euclidea) un problema isoperimetrico e la sua soluzione:

Fra tutti i rettangoli isoperimetrici, quello di area massima è il quadrato.

Infatti, facendo variare il punto D all'interno del segmento AB si ottengono tutti i rettangoli che hanno questo segmento come semiperimetro; la loro area differisce (in difetto) da quella del quadrato per un altro quadrato: quello costruito sui punti di suddivisione.

9. Dai prodotti notevoli alle equazioni di secondo grado.

Concludo questa proposta didattica con la formulazione di un problema presentato e discusso in classe: nella figura (fig. 4) è rappresentato un appezzamento di terreno; che forma ha? è possibile trasformarlo in uno equivalente di forma rettangolare? Descrivi con quale procedura. Se le lettere denotano le lunghezze dei segmenti, qual è l'espressione dell'area del terreno nelle due forme diverse?

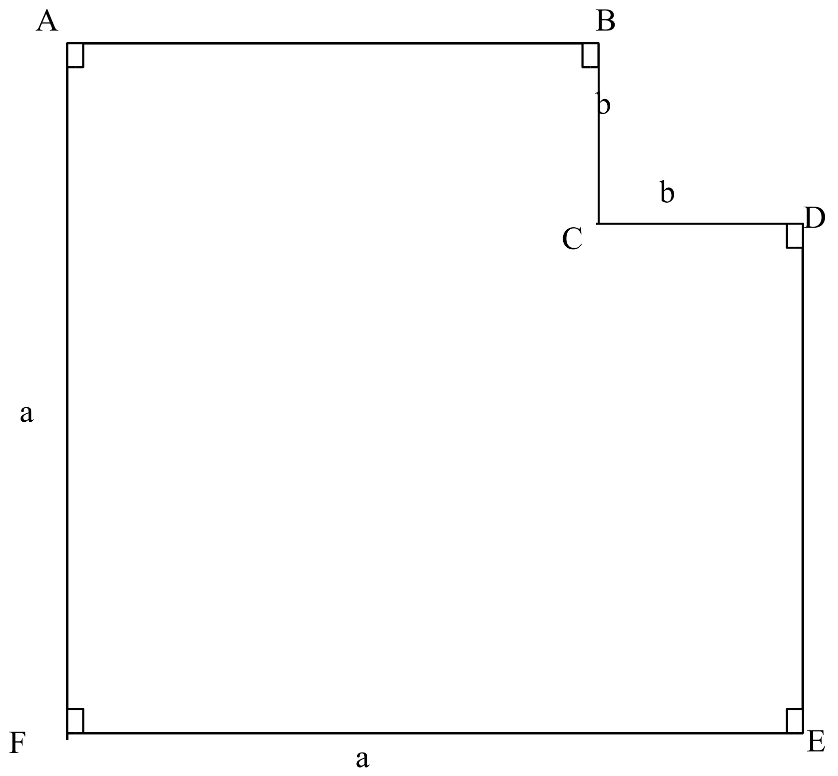

Fig. 7

La forma è quella di un *esagono irregolare concavo*. Per poter affermare che è anche la "*differenza di due quadrati"* occorre una dimostrazione non banale; l'area ha espressione $a^2 - b^2$.

Per poter trasformare questo poligono in un rettangolo (anche senza conoscere il teorema delle parti uguali e disuguali descritto nel par. precedente) si può procedere come nella figura seguente (fig. 8); qui l'area ha espressione $(a+b)(a-b)$.

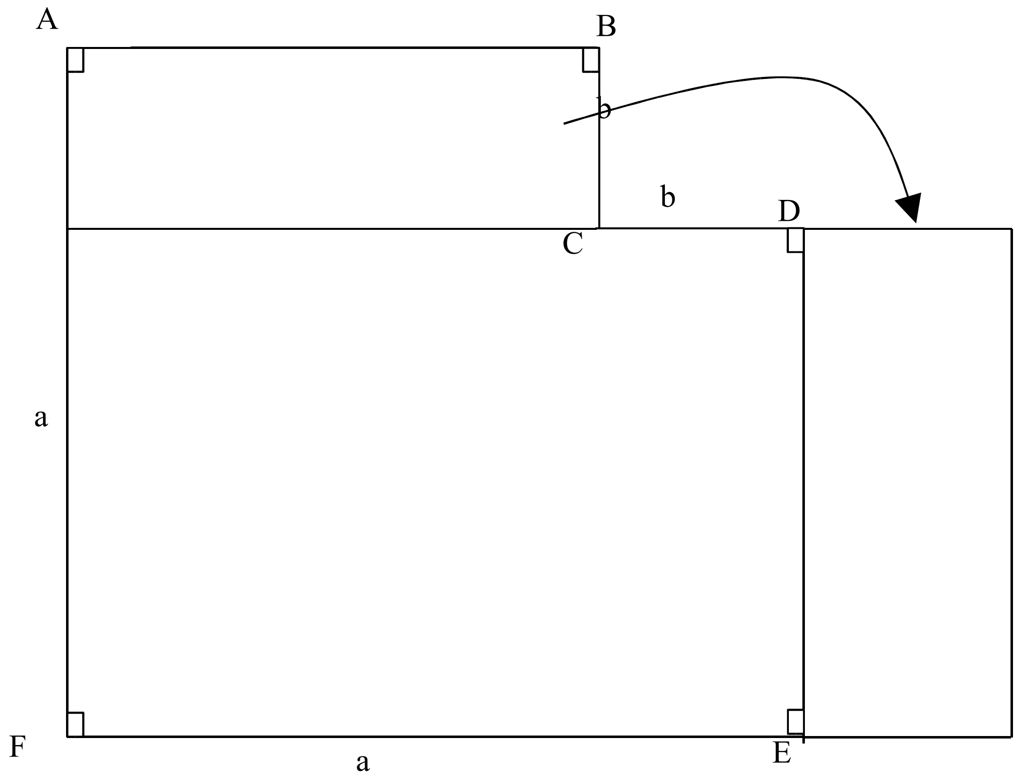

Fig. 8

Il percorso geometrico inverso (dal rettangolo alla differenza di quadrati) è la raffigurazione della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado; i principali argomenti del biennio sono così tutti in qualche modo collegati da un filo rosso che, come è avvenuto nell'antichità, intrecciava aritmetica e geometria. Vediamo come:

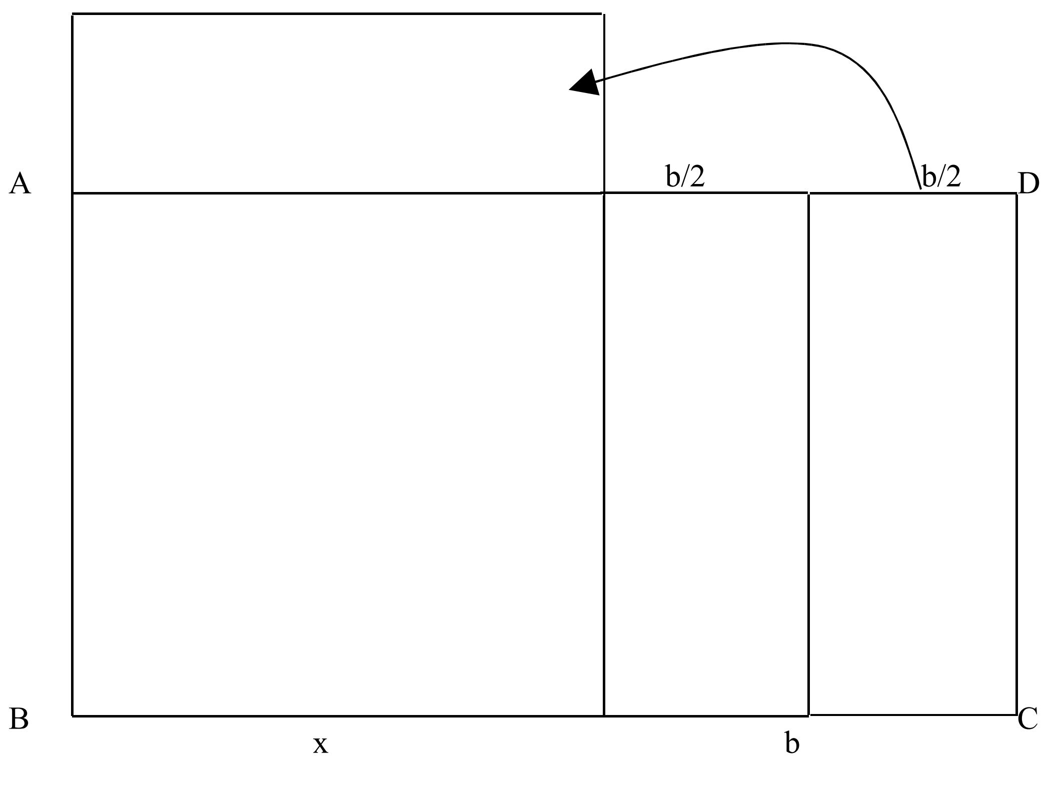

fig. 9

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=c$$

da cui si ricava x.

Nei secoli che seguirono, la semplice manipolazione algebrica suggerita da quell’operazione geometrica, ormai staccata dal significato originario, consentì la soluzione generale dell’equazione di secondo grado; anche questo percorso può essere riproposto in classe, restituendo il senso di una formula che viene imposta e subìta per tutti gli anni di scuola superiore e poi dimenticata da generazioni di studenti.

Appendice 1: Il test delle carte di Wason e la versione modificata di Criggs e Cox.

1. Test di Wason.

Osserva le seguenti quattro carte:

A	R	4	7

Dobbiamo verificare se per queste quattro carte è vera la regola

"Se da una parte c'è una vocale, dall'altra c'è un numero pari."

Quali carte gireresti per controllare se questa regola è vera? Perché?

2. Test di Griggs e Cox.

Immagina di essere un poliziotto che deve controllare se in un bar è rispettata la seguente legge:

“Se una persona beve birra, deve avere più di sedici anni”.

Su un tavolo del bar vengono messe quattro carte: da un lato c’è l’età della persona da controllare (sotto/sopra i 16 anni), dall’altro il tipo di bibita consumata al bar. Le quattro carte sono girate in questo modo:

beve birra	beve acqua	sopra i 16 anni	sotto i 16 anni

Quali carte gireresti per controllare se questa regola è vera? Perché?

APPENDICE 2: Da N. Postman e C. Weingarten, “*L'insegnamento come attività sovversiva”*, tr. it. La Nuova Italia, Firenze, 1969.

La scena si svolge in un ospedale; è un dialogo tra un chirurgo e il suo primario.

“GILLUPSIE: e lei, Carstairs, come le vanno le cose?
CARSTAIRS: temo di essere stato sfortunato, dottor Gillupsie. Niente operazioni questa settimana, solo tre pazienti morti.
GILLUPSIE: Bene; dovremmo parlarne un po', non le pare? Di che cosa sono morti?
CARSTAIRS: Non lo so con certezza, dottor Gillupsie, ma comunque ho dato a ciascuno di loro un bel po' di penicillina.
GILLUPSIE: Ah! Il sistema tradizionale della cure “buona di per se stessa”, eh, Carstairs?
CARSTAIRS: Beh, non esattamente, capo. Pensavo solo che la penicillina li avrebbe fatti stare meglio.
GILLUPSIE: Per che cosa li stava curando?
CARSTAIRS: Insomma, stavano proprio male, capo, e io lo so che la penicillina fa star meglio gli ammalati.
GILLUPSIE: Certamente, Carstairs. Penso che lei abbia fatto bene.
CARSTAIRS: E i morti, capo?
GILLUPSIE: Cattivi, figlio mio, cattivi pazienti. E non c'è niente che possa fare un dottore quando si trova di fronte dei cattivi pazienti. E nessuna medicina può farci nulla, Carstairs.
CARSTAIRS: Eppure mi è rimasta ancora la seccante impressione che forse non avevano bisogno di penicillina, che servisse qualcos'altro.
GILLUPSIE: Sciocchezze! La penicillina non fa mai cilecca su dei buoni pazienti. Lo sanno tutti.
Al suo posto non mi preoccuperei troppo, Carstairs.”

BIBLIOGRAFIA.

[Br] JEROME BRUNER, “*La cultura dell'educazione”*, Feltrinelli, Milano, 1997.

[E] EUCLIDE, “*Gli Elementi*”, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, 1988.

[F] HANS FREUDENTHAL, “*Ripensando l'educazione matematica*”, La Scuola, Brescia, 1994.

[F] MARVIN JAY GREENBERG, “*Euclidean and Non-Euclidean Geometries*”, W. H. Freeman, New York, 1993.

[V] VINICIO VILLANI, “*Cominciamo dal punto; domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*”, Pitagora, Bologna, 2006.

[Z] ROSETTA ZAN, “*Difficoltà in matematica; Osservare, interpretare, intervenire*”, Springer, Milano, 2007.