PENSARE E MISURARE L'INCERTEZZA

UN APPROCCIO NARRATIVO A DEFINIZIONI E PUNTI DI VISTA SULLA PROBABILITÀ

Ivan Casaglia

PRESENTAZIONE

Questo percorso didattico è stato pensato e realizzato, nell'ambito del progetto *Trasversalia*, con l'obiettivo di avvicinare gli studenti della scuola superiore al concetto di probabilità e ai suoi possibili significati in una prospettiva che non fosse esclusivamente disciplinare. Per capire perché la scelta sia caduta sul tema della probabilità, e per capire come il percorso didattico sia stato sviluppato, occorre, seppure brevemente, tornare a considerare le due categorie di riferimento del progetto *Trasversalia*: complessità e narratività.

Negli ultimi decenni si è molto parlato di *matematica della complessità* per comprendervi alcuni dei filoni più importanti della ricerca contemporanea[1]. Ma l'elevato tecnicismo che gli argomenti coinvolti in questi studi richiedono, difficilmente avrebbe potuto conciliarsi con l'esigenza di sperimentare un percorso didattico che non si limitasse ad un livello informativo. Se l'ambizione è infatti quella di coinvolgere gli studenti in una esperienza significativa occorre individuare degli argomenti che siano adeguati alle loro possibilità e ai loro strumenti cognitivi.
Il tema che abbiamo scelto, oltre a non richiedere la conoscenza di strumenti matematici particolarmente sofisticati, ha un legame importante con la complessità.
Si può infatti affermare che la stessa costruzione di una teoria delle probabilità rappresenti, in qualche modo, il tentativo di tenere sotto controllo il futuro, di fornire delle basi razionali alle scelte che si effettuano in condizioni di incertezza. E la vastità degli impieghi di strumenti statistico-probabilistici nel mondo contemporaneo è davvero impressionante.
Il tentativo di imbrigliare l'incertezza prende le mosse da un retroterra di intuizioni e di convinzioni sui fenomeni aleatori largamente diffusa e radicata nell'uomo. Ma accade, al pari di ogni altra teoria scientifica, che le conseguenze delle leggi del calcolo della probabilità finiscano per scontrarsi con quelle concezioni spontanee, per sovvertire quelle intuizioni. Molti anni fa Bruno De Finetti (1967, p. 52), il più importante studioso italiano di probabilità del secolo scorso, aveva osservato:

> Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male. In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare […] un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza, oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.

Un vasto campo di ricerche psicologiche[2] ha fatto emergere la presenza di una sorta di *inconscio cognitivo* che, a nostra insaputa, interviene nei nostri giudizi, dando luogo a quelli che vengono denominati *tunnel della mente* (*biases*). È davvero sorprendente constatare quanti di questi *tunnel* mentali coinvolgano una valutazione di ciò che è ritenuto probabile o improbabile, cioè un punto di vista più o meno spontaneo sulla probabilità. E la sorpresa è ancora più grande se confrontiamo la diffusione di *tunnel* mentali di tipo probabilistico con la quantità e l'importanza delle decisioni

[1] Sul significato di *complessità* in ambito matematico può essere utile consultare, a livello divulgativo, *Luccio e Pagli* (1992).
[2] Una sorta di rassegna ragionata sui risultati di queste ricerche è quella, molto interessante, proposta da *Piattelli Palmarini* (1993). Ad essa ci siamo ispirati per realizzare alcuni dei passaggi del presente percorso, attingendovi anche quesiti e problemi stimolanti.

individuali e collettive che vengono prese ogni giorno sulla base di informazioni di tipo probabilistico e statistico.
Ma la probabilità ha anche una sua complessità epistemologica. Le diverse concezioni e interpretazioni di questo concetto che si sono avvicendate e contrastate nel processo di costruzione della teoria delle probabilità, mantengono intatta la loro vitalità. E il dibattito se la probabilità debba essere concepita come una sorta di grandezza fisica o se debba invece essere concepita come una relazione logica, e ancora il contrasto tra una concezione oggettiva e una concezione soggettiva della probabilità, restano ancora aperti. La probabilità si presenta dunque come una nozione articolata, ricca di significati e di possibili interpretazioni non sempre coerenti o compatibili fra loro. Ed è questa sua fisionomia che contribuisce alla nostra idea di complessità, almeno per ciò che riguarda il nostro modo di pensare il mondo[3].

La riflessione epistemologica degli ultimi decenni ha messo in luce la dimensione narrativa della scienza:

> L'epistemologia, nel contempo ha anch'essa spostato il proprio baricentro: si è emancipata dall'idea di essere uno "specchio della natura", si è vista come condizionata dai "grandi racconti" (che spiegano in quanto si legano a axiologie, a visioni-del-mondo, a culture), si è emancipata da una "ragione forte e classica" per rimandare di se stessa un'immagine molto più mossa, più complessa e sfumata, soprattutto meno logicistica e metodologistica. L'analogia, l'immaginazione, la metafora sono entrate a far parte del bagaglio dello scienziato e il "fare scienza" è apparso sempre più come un'avventura di cui si può dare, prima di tutto e soprattutto, un racconto. La scienza come avventura si narra, non si codifica a priori. [in Cambi (), p. 13]

A proposito della *narratività* nella scienza, Jerome Bruner (1997, p.140) scrive:

> Il processo del fare scienza è narrativo. Consiste nel produrre ipotesi sulla natura, nel verificarle, correggerle e rimettere ordine nelle idee. Nel corso della produzione di ipotesi verificabili giochiamo con le idee, cerchiamo di creare anomalie, cerchiamo di trovare belle formulazioni da applicare alle contrarietà più intrattabili in modo da poterle trasformare in problemi solubili, inventiamo trucchi per aggirare le situazioni intricate.

cogliendo anche le importanti ricadute che la dimensione narrativa può avere sull'insegnamento scientifico:

> Non sto proponendo di sostituire alla scienza la storia della scienza. Sostengo invece che la nostra istruzione scientifica dovrebbe tener conto in ogni sua parte dei processi vivi del fare scienza, e non limitarsi a essere un resoconto della "scienza finita" quale viene presentato nel libro di testo, nel manuale e nel comune e spesso noiosissimo "esperimento di dimostrazione".(.)

Queste considerazioni hanno una validità generale, ma la probabilità, proprio per la ricchezza della sua storia e per il contrasto interpretativo a cui abbiamo accennato, si presta in modo particolare a tentare una esperienza didattica che voglia tener conto dei *processi vivi del fare scienza* di cui parla Bruner.
L'insegnamento della probabilità nella scuola, quando c'è[4], non si sottrae invece, almeno nelle pratiche più diffuse, al destino di essere un *resoconto della "scienza finita"*. Basta uno sguardo alle proposte editoriali di maggiore successo, per affermare che il modo più diffuso di trattare la probabilità è quello di una presentazione in forma assiomatico-deduttiva, più o meno esplicita, più

---

[3] Il rapporto tra probabilità e complessità si arricchisce di un ulteriore elemento se si passa ad analizzare la distinzione tra *probabilità epistemica* e *probabilità ontologica*, che caratterizza il diverso uso della probabilità nella fisica prima e dopo la nascita della meccanica quantistica. Data la complessità dell'argomento mi è sembrato che questo ulteriore contrasto non potesse far parte integrante del percorso didattico. Esso è affrontato, ad un livello informativo, in una delle *finestre* del percorso.

[4] La probabilità ha tardato ad affermarsi nella scuola e resta per molti aspetti ancora marginale, nonostante che a questo tema siano dedicate precise indicazioni nei programmi ministeriali, fin dal 1979 per la scuola media, dal 1985 per la scuola elementare e a partire dalla fine degli anni ottanta, con le cosiddette sperimentazioni assistite, nella scuola superiore.

o meno rigorosa e chiara. In questa impostazione lo spazio dedicato al confronto tra le diverse definizioni di probabilità è molto limitato. L'argomento viene svolto in modo sbrigativo, fornendo una soluzione che mette al riparo da ogni perplessità interpretativa: le diverse definizioni non sono altro che valutazioni di probabilità utili in diversi contesti applicativi.

Il nostro percorso, ispirandosi alle considerazioni di Bruner, non sostituisce l'insegnamento del calcolo delle probabilità con l'insegnamento della sua storia ma, considerando alcuni momenti fondamentali del dibattito scientifico ed epistemologico intorno al significato di probabilità, cerca di ripercorrere, seppure in una forma semplificata, il processo di costruzione della teoria delle probabilità. Ed è proprio questo processo che impone di adottare un punto di vista non esclusivamente interno alla matematica.

Nel costruire il percorso didattico abbiamo cercato di articolare i passaggi più importanti nella esplorazione intorno ad un campo di problemi, nella formulazione di un'ipotesi sul significato della probabilità, nella scoperta delle proprietà che la riflessione intorno a quei problemi e a quella ipotesi suggerisce. Ma ogni ipotesi finisce, prima o poi, per incontrare *fenomeni* che non è in grado di descrivere, problemi che non è in grado di risolvere, e che impongono una sua correzione o il suo superamento.

Solo in questa prospettiva trova la sua corretta collocazione anche la definizione assiomatica che a partire dagli anni trenta del Novecento si è affermata in ambito matematico, consentendo l'enorme successo del calcolo delle probabilità nell'ultimo mezzo secolo. Per cogliere il significato culturale della svolta assiomatica, occorre infatti considerarla come punto di approdo di un faticoso percorso storico, e ciò è possibile solo a condizione di aver prima esplorato i tentativi fatti nel corso del tempo per precisare il concetto di probabilità.

Quella svolta non deve poi essere presentata come qualcosa di definitivo, che mette a tacere ogni questione interpretativa, come se le cose davvero importanti fossero solo quelle in cui si rinuncia al significato. Le differenze interpretative intorno alla probabilità riemergono in ogni contesto applicativo, e la costruzione di una teoria assiomatico-deduttiva deve essere interpretata come un passaggio della storia del pensiero scientifico che ha consentito di riflettere intorno alla probabilità ad un livello più avanzato.

Se questo spiega perché la scelta sia caduta sulla probabilità e perché i contenuti del percorso siano stati sviluppati in un certo modo, è necessario fare qualche considerazione di tipo metodologico. Nel progettare e sperimentare le attività ci siamo proposti di far partecipare gli studenti al processo di costruzione di quel concetto articolato di probabilità di cui abbiamo sopra parlato. L'intero percorso è quindi concepito come una sorta di narrazione corale, fatta delle riflessioni individuali degli studenti, dei loro contributi ai dibattiti in classe, delle sintesi scaturite dalle discussioni. Ogni tappa del percorso, perciò, parte dall'esplorazione di uno o più problemi significativi (suggeriti da una lettura o proposti dall'insegnante) e attraverso la formulazione di precise domande, impegna ciascuno studente nella scrittura delle proprie riflessioni, nel confronto argomentato con il punto di vista degli altri, per approdare, se possibile, alla formulazione di una sintesi comune.

Si è già fatto riferimento alle concezioni spontanee intorno alla probabilità. Un insegnamento scientifico che si proponga di realizzare apprendimenti duraturi e consapevoli non può prescindere dalla consapevolezza di queste concezioni. Ma il ricorso al confronto tra i comportamenti spontanei di fronte all'incertezza e ciò che suggerisce lo studio della probabilità, si è rivelato anche uno strumento utile dal punto di vista didattico. L'esame dei dilemmi e dei paradossi che scaturiscono da quel confronto hanno permesso infatti agli studenti, di scoprire che la probabilità coinvolge qualcosa di personale, qualcosa che ha a che fare col proprio modo di vedere e di comportarsi di fronte all'incertezza.

Il percorso è stato svolto in ambito prevalentemente matematico, ma ciò non ha impedito di coinvolgere altri insegnanti e altri insegnamenti, nella riflessione sul significato della probabilità e sulla sua portata concettuale. Quelle che abbiamo indicato nel percorso come *finestre* hanno costituito dei momenti di arricchimento e di approfondimento sui temi trattati, per acquisire la consapevolezza del ruolo che la probabilità ha assunto in altri contesti conoscitivi[5].

Il percorso didattico è stato sperimentato in una quarta classe del liceo scientifico P.N.I.[6] che non aveva mai affrontato prima il tema della probabilità. Trattandosi di un lavoro intorno alle definizioni, questa omissione ha potuto rappresentare un pregio: lo svolgimento del percorso non è stato condizionato da nozioni precedenti intorno alla probabilità. L'acquisizione di enunciati non accompagnata da una comprensione adeguata del loro significato, può infatti costituire un ostacolo più che un aiuto per un lavoro di questo tipo. D'altra parte, per rimediare al ritardo, si è reso necessario affiancare lo svolgimento dell'esperienza con lo studio di tutti quei contenuti di probabilità e di calcolo combinatorio che sono generalmente previsti per il biennio della scuola superiore. Ciò ha comportato un impegno di due mesi abbondanti di lavoro, nell'ambito dei quali il tempo effettivamente destinato allo svolgimento del percorso è stato di circa 25 ore.
L'illustrazione del percorso si riferisce soltanto allo svolgimento delle attività previste nel suo ambito. Naturalmente a questo svolgimento si sono accompagnate quelle attività di consolidamento e di approfondimento che appartenendo alla parte più consolidata della didattica, non hanno bisogno di essere precisate. Nella probabilità, per fortuna, è disponibile un vasto repertorio di problemi significativi che consentono di evitare la noiosa ripetizione di esercizi sull'estrazione di biglie da un'urna che ne hanno, per troppo tempo, contraddistinto l'insegnamento.

LE CONCEZIONI DEGLI STUDENTI

La tappa iniziale del percorso didattico è rappresentata da una ricognizione delle concezioni degli studenti intorno alla probabilità e da una prima riflessione su di esse.
Il questionario che abbiamo proposto è costituito da alcune domande che prefigurano il percorso che viene poi sviluppato. Si potrebbe affermare che l'obiettivo dell'intera esperienza didattica è, in buona parte, quello di fornire una risposta criticamente fondata alle domande proposte nel questionario.

QUESTIONARIO

1) Spiega in quali contesti e con quale significato si usa il termine "probabilità"

2) Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica un possibile significato individuando, in particolare, sulla base di quali considerazioni esse possono essere state formulate :
   a) Lanciando una moneta si ha una probabilità del 50% di ottenere testa
   b) La probabilità che piova a Firenze il giorno di ferragosto è il 5%
   c) L'Inter ha una probabilità del 70% di battere l'Ancona nella prossima partita

3) Ho appena gettato in aria una moneta sette volte di seguito, senza che tu abbia assistito ai lanci, e ho registrato i risultati. Ti propongo le seguenti sequenze di risultati possibili, tra le quali c'è quella che ho effettivamente ottenuto :
   a) TTTTCCC
   b) CTTCTCC
   c) TTTTTTT

   Se indovini la sequenza vinci tre euro, altrimenti ne perdi uno. Su quale sequenza ti sentiresti di scommettere? Motiva la risposta

[5] Le *finestre* del percorso coinvolgono la Filosofia e la Fisica. Ciò dipende dall'indirizzo di studi in cui è stata effettuata l'esperienza, ma anche dalla disponibilità o meno degli altri insegnanti, non solo per ragioni personali. Sarebbe molto interessante coinvolgere in una esperienza sulla probabilità, altre discipline come le Scienze naturali (si pensi al ruolo del caso nella genetica), o laddove ne sia previsto l'insegnamento, l'Economia e le discipline tecnologiche.
[6] Piano Nazionale Informatica, sperimentazione di matematica e fisica.

4) Nel gioco del Lotto molti scommettitori puntano sui cosiddetti numeri “ritardatari”, cioè sui numeri che non sono stati estratti, su una data ruota, da molte settimane. Condividi questa strategia di gioco? Giustifica la risposta.

L’analisi dei questionari svolta dall’insegnante, è stata seguita da una discussione in classe, per illustrare ciò che era emerso, e per confrontare le diverse posizioni. Naturalmente l’intento della discussione è stato solo quello di porre dei problemi sul tappeto, non di risolverli. Fin da questo primo momento si è creato in classe un clima di confronto, talvolta anche acceso, delle diverse opinioni. Molti hanno scoperto che anche parlando di matematica si possono avere punti di vista diversi, si può discutere. Le occasioni in cui abbiamo messo a confronto i diversi punti di vista hanno motivato lo sviluppo e l’approfondire degli argomenti trattati.
Vediamo più in dettaglio che cosa è emerso nelle risposte alle singole domande.

Quesito 1
Come si è già osservato, nella classe in cui si è svolta l’esperienza gli studenti che non avevano mai affrontato prima il tema della probabilità. Nessuna delle risposte date ha perciò riproposto una definizione da manuale (neppure quella più diffusa della probabilità classica). Tutti gli studenti hanno espresso la convinzione che la probabilità di un certo evento sia un numero che quantifica la possibilità del verificarsi di quell’evento, e che esista un qualche *procedimento matematico* per poterla determinare, ma nessuno ha detto quale sia. In alcune risposte si affaccia una concezione vicino a quella classica, in altre si usa già il termine frequenza, e si identifica la probabilità con la previsione della frequenza relativa con cui un certo evento si verificherà in esperienze ripetute. In ogni caso, come la discussione in classe ha fatto emergere, anche in relazione ai quesiti successivi, nessuno è stato in grado di dare una definizione che consentisse di determinare effettivamente la probabilità di un evento.
Quanto ai contesti, l’insieme delle risposte ha tracciato un quadro informato e corretto delle possibili applicazioni della probabilità.

Quesito 2.a
Si sono avute risposte diverse, ma nessuna ha riprodotto la definizione classica. La stragrande maggioranza delle risposte si è fondata su una concezione intuitiva di tipo classico, e sul ricorso al *principio di indifferenza* (poiché una moneta ha due facce, nel lanciarla ci sono tante possibilità che esca testa quante ce ne sono che esca croce…). Non mancano però delle risposte di stampo frequentista, per le quali una affermazione di quel tipo può essere formulata solo in seguito ad una serie di lanci. Ma restando nell’ambito di una concezione che, per intenderci, possiamo definire come classica, c’è chi ha notato che per formulare quella affermazione si deve trascurare la possibilità che la moneta caschi di taglio. Qualcuno interpreta la probabilità come una frequenza relativa attesa, ma tende a precisare che ciò non significa che in un numero ripetuto di lanci la frequenza relativa effettiva debba coincidere con la probabilità.

Quesito 2.b
La maggior parte delle risposte è, in modo più o meno esplicito, di tipo *frequentista*. Vi è però chi si aspetta che quella quantificazione sia il prodotto di un *modello matematico*, richiamando un termine che viene spesso usato sugli organi di informazione in relazione alle previsioni meteorologiche. Fra le risposte emerge però l’interrogativo se sia corretto applicare per il futuro una misura che si fonda su osservazioni svolte nel passato. Si tratta di una questione di grande importanza che meriterà un approfondimento successivo.
Nella discussione in classe si è avuto modo di mettere in evidenza la diversità tra le situazioni affrontate nei quesiti 2.a e 2.b. Se nel primo caso, infatti, la maggior parte degli studenti è convinta che la determinazione della probabilità può avvenire prima di qualsiasi esperienza, nel secondo caso tutti sono convinti che quella probabilità possa essere calcolata solo a partire dalla elaborazione di osservazioni sperimentali.

Quesito 2.c
Tra i tre quesiti inquadrati dalla domanda 2, questo è quello che ha prodotto le risposte, a detta degli stessi studenti, meno convinte e meno convincenti. Alcune di esse tentano di riproporre l'interpretazione della probabilità come frequenza relativa, guardando alla serie storica dei risultati ottenuti negli incontri diretti tra le due squadre. Ma si rendono subito conto del fatto che una tale misura è del tutto inattendibile. Altre risposte ipotizzano l'esistenza di un modello matematico che tenendo conto di diversi parametri, possa condurre a quella misura, ma non forniscono un'idea, neppure vaga, di come potrebbe funzionare un tale modello. Qualcuno ha pensato che quella misura possa essere il risultato di un sondaggio d'opinione.

Quesito 3
Il testo del quesito si trova in *Piattelli Palmarini* (1993, p. 55) . La maggioranza delle risposte ha indicato, correttamente, l'equivalenza dei tre risultati. C'è però chi ha ammesso una preferenza per la sequenza b), perché irregolare, e chi, pur riconoscendo la stessa probabilità alle tre sequenze, ha ammesso che, se avesse dovuto scommettere, lo avrebbe fatto sulla sequenza b).
Nella discussione in classe si sono confrontate diverse argomentazioni, ma anche la difficoltà che si trova nell'utilizzare in modo coerente, nella pratica, un risultato che sul piano teorico si riconosce come valido.

Quesito 4
Nel rispondere a questo quesito molti studenti si sono trovati di fronte ad un dilemma di non facile soluzione. Da un lato si riconosce che la possibilità che venga estratto un certo numero è sempre la stessa, ad ogni estrazione, per ciascun numero. Dall'altra, sulla base della convinzione che in numero grande di prove le frequenze delle estrazioni di ciascun numero debbano essere approssimativamente uguali[7], ci si aspetta che un numero che non sia stato estratto da molte settimane, per una sorta di compensazione, debba avere maggiori possibilità di uscire.

ALLE ORIGINI DEL CALCOLO: LA PROBABILITÀ CLASSICA

Lasciando aperti tutti gli interrogativi che sono emersi nelle risposte al questionario e soprattutto nella discussione che ne è seguita, abbiamo letto in classe due importanti documenti (v. Appendice). Il primo è tratto da una lettera di Galileo e rappresenta una delle testimonianze della "preistoria" della probabilità. Il secondo è un estratto di quel carteggio tra Pascal e Fermat che viene generalmente riconosciuto dagli studiosi come l'atto di nascita del calcolo delle probabilità. Entrambi i documenti hanno il merito, dal punto di vista didattico, di affrontare alcuni problemi significativi e ricchi di sviluppi, in modo chiaro ma senza esplicitare una definizione di probabilità.

<u>*Lettura n.1*</u>

CONSIDERAZIONI DI GALILEO SUL GIOCO DELLA ZARA

<u>*Lettura n.2*</u>

IL PROBLEMA DELLE PARTI: LA SOLUZIONE DI FERMAT

[7] Nel linguaggio comune, e quindi anche in quello di alcuni studenti, questa asserzione viene spesso confusa con la *legge dei grandi numeri*, termine con il quale si indicano invece alcuni teoremi del calcolo della probabilità.

Sia le considerazioni svolte da Galileo che il ragionamento condotto da Fermat (e riportato da Pascal) sottintendono la concezione *classica* di probabilità e risolvono i problemi analizzati attraverso il calcolo del numero dei casi favorevoli ad un certo evento[8].

Dopo l'esame di questi testi abbiamo, posto in classe, la domanda:

Limitandoci al caso di giochi come quelli esaminati nelle due letture svolte, (lancio di monete, lancio di dadi, estrazioni da un mazzo carte…) in che modo possiamo calcolare la probabilità di un certo evento? Che significato può avere una affermazione come la 2.a del questionario?

Nella discussione in classe è emersa, a questo punto in modo naturale, la definizione di probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Si è però osservato che questa definizione è legittima solo a condizione che la moneta o il dado siano perfettamente equilibrati, in modo tale che ogni esito possibile di un lancio (*evento elementare*) abbia la stessa possibilità di verificarsi. Abbiamo quindi formulato la definizione di probabilità classica.

PROBABILITÀ CLASSICA
Se in un gioco o in un esperimento gli eventi elementari hanno tutti la stessa possibilità di verificarsi, la probabilità di un evento *E* è il rapporto tra il numero degli eventi (elementari) favorevoli e il numero degli eventi (elementari) possibili.

Poiché gli studenti hanno familiarità con il linguaggio della teoria degli insiemi, abbiamo introdotto la rappresentazione degli eventi come insiemi, e delle operazioni sugli eventi come operazioni sugli insiemi. In questo contesto abbiamo quindi espresso la probabilità come rapporto tra la cardinalità dell'insieme *E* e quella dello *spazio campione* Ω, cioè dell'insieme di tutti gli esiti possibili per l'esperimento.

Dal punto di vista storico sarà bene precisare che una definizione della probabilità classica sarà data, in forma esplicita, solo nel 1812, da Pierre Simon de Laplace, nel suo *Théorie analytique des probabilités*, nonostante che la maggioranza degli studiosi del XVII e XVIII secolo, a cui si devono molti risultati significativi sulla probabilità, ne facessero implicitamente uso.

Siamo poi passati ad esaminare alcune proprietà che abbiamo dimostrato a partire dalla definizione classica.

P1) *probabilità dell'evento impossibile*: $p(\varnothing)=0$
P2) *probabilità dell'evento certo*: $p(\Omega)=1$
P3) per ogni evento *A*: $0 \le p(A) \le 1$
P4) *legge della somma*:
se $A \cap B = \varnothing$ *(eventi incompatibili),* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
P5) *probabilità dell'evento contrario*: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
P6) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

[8] Gli studenti della classe in cui è stata condotta l'esperienza non conoscevano i concetti del calcolo combinatorio; lo studio delle considerazioni di Galileo e di Fermat ha offerto un'ottima occasione per introdurli.

SPERANZA MATEMATICA E PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Siamo tornati a considerare il problema delle parti affrontato nel carteggio Pascal-Fermat. La soluzione a questo problema proposta da Pascal (v. Appendice) consente di introdurre concetti importanti come quello di *speranza matematica* e di *gioco equo*.

<u>*Lettura n.3*</u>
IL PROBLEMA DELLE PARTI: LA SOLUZIONE DI PASCAL

Nel ragionamento svolto da Pascal, relativamente al primo caso esaminato, la ripartizione della posta viene così effettuata:

al primo giocatore: $32+32\cdot\frac{1}{2}=48$ monete

al secondo giocatore: $32\cdot\frac{1}{2}=16$ monete.

Ho chiesto agli studenti di esplicitare il calcolo fatto da Pascal per individuare la parte della posta da assegnare al primo giocatore negli altri due casi analizzati nella lettera.

Chiaramente, queste quantità non sono altro che le *speranze matematiche* del primo dei due giocatori. Abbiamo quindi esplicitato questo concetto e, a partire da questo, abbiamo introdotto anche il concetto di *gioco equo*.

Il problema delle parti si presta anche ad una diversa soluzione che coinvolge la *probabilità condizionata*[9]. Dopo aver riconosciuto che, se $P(A)\neq 0$, la probabilità di *B* condizionata ad *A* risulta:

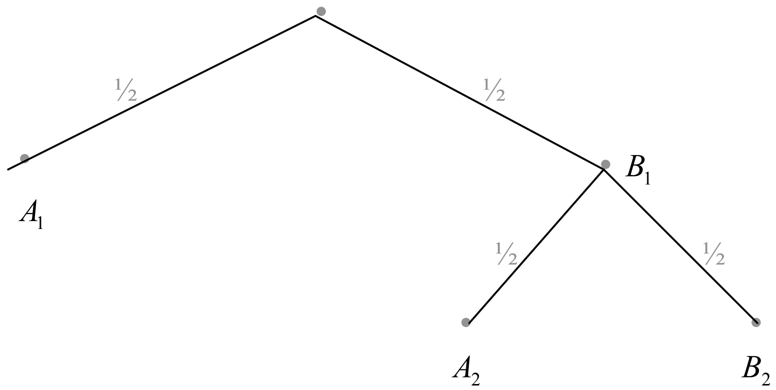
$$p(B|A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)},$$

abbiamo formulato la:

P7) *legge del prodotto*: $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)$

Nello studio dei giochi in cui interviene la probabilità condizionata è importante introdurre la rappresentazione di schemi ad *albero* che costituisce uno strumento molto efficace e importante per il ragionamento probabilistico. Tornando al problema delle parti esposto nella lettera di Pascal, ho chiesto agli studenti di rappresentare mediante uno schema ad albero la possibile continuazione del gioco:

[9] Abbiamo introdotto questo concetto partendo dall'esame di alcuni casi concreti (lancio di due dadi, estrazioni da un mazzo di carte) e dall'osservazione che il verificarsi di un evento *A* produce una *contrazione* dello spazio campione Ω, per cui la probabilità di un evento *B* condizionata al verificarsi dell'evento *A* risulta: $p(B|A)=\frac{|A\cap B|}{|A|}$. Naturalmente questa formula è applicabile a condizione che $A\neq\varnothing$ e dividendo numeratore e denominatore per $|\Omega|$, può essere scritta come: $p(B|A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$. La *legge del prodotto* è una diversa formulazione della definizione di probabilità condizionata.



e di calcolare, a partire da questo, la probabilità di vittoria per *A* e per *B*:

$$p(A) = p(A_1 \cup (B_1 \cap A_2)) = p(A_1) + p(B_1 \cap A_2) = p(A_1) + p(B_1) \cdot p(A_2|B_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$p(B) = p(B_1 \cap B_2) = (B_1) \cdot p(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Lo studio della proprietà P6 ci ha permesso di introdurre il concetto di *indipendenza (stocastica)*. Nel lavoro più strettamente disciplinare che ha affiancato questo percorso, abbiamo condotto lo studio delle *prove ripetute*, giungendo a determinare la distribuzione di Bernoulli.

Finestra n.1: FILOSOFIA

PASCAL: FEDE E RISCHIO

Partendo dalla lettura del celebre frammento del *pari* tratto dai *Pensieri* (2000, pp. 247–255) si è riflettuto sugli argomenti probabilistici utilizzati da Pascal a favore dell'esistenza di Dio.

CRITICA DELLA PROBABILITÀ CLASSICA

Ho invitato gli studenti a riflettere individualmente, a casa, sulla seguente domanda:

Con la definizione di probabilità classica, abbiamo dato una prima risposta su che cosa sia la probabilità di un evento. Che cosa ti *convince* e che cosa *non ti convince* di questa risposta?

Nella lezione successiva, a partire dalla lettura di alcune delle riflessioni svolte singolarmente dagli studenti, abbiamo condotto una discussione in classe dalla quale sono emerse le seguenti considerazioni critiche:

1) la probabilità classica si può applicare solo in contesti molto limitati: i giochi d'azzardo che abbiano precise condizioni di regolarità nel loro svolgimento (non è ad esempio ragionevolmente applicabile in una scommessa su una corsa di cavalli o su una partita di calcio);

2) alla base della probabilità classica c'è l'ipotesi che tutti gli eventi elementari abbiano la stessa possibilità di verificarsi: come si può, nell'esame di casi concreti, formulare questa ipotesi? Come si può stabilire se un dado o una moneta sono o non sono truccati?

3) la definizione classica presenta un circolo vizioso: per definire che cosa sia la probabilità bisogna supporre che gli eventi elementari abbiano la stessa possibilità di verificarsi; ma questo è un modo diverso per affermare che hanno la stessa probabilità, facendo riferimento a quello stesso concetto che si pretende di definire.

Finestra n.2: FILOSOFIA

LAPLACE: PROBABILITÀ E DETERMINISMO

Partendo dalla lettura di alcuni passi dell'Introduzione al *Saggio filosofico sulle probabilità* di Laplace si esamina la concezione della probabilità dell'autore in rapporto al determinismo. Quella di Laplace è una probabilità *epistemica* che interviene nello studio della natura allorquando non siamo in grado di conoscere tutte le cause che determinano un avvenimento o quando non siamo comunque in grado di calcolare gli effetti che quelle cause determinano.

LA CONCEZIONE FREQUENTISTA

Ho posto agli studenti la seguente domanda:

Torniamo a riflettere sulle letture fatte all'inizio del percorso. Che cosa ha mosso i gentiluomini fiorentini a rivolgersi a Galileo?

La discussione in classe ha consentito di riconoscere che l'esigenza degli interlocutori di Galileo era quella di spiegare perché due eventi ritenuti, col linguaggio moderno, equiprobabili, facessero registrare, su un numero grande di osservazioni, frequenze diverse. Al di là dell'errore iniziale, quello di ritenere equiprobabili eventi che non lo sono, la convinzione che muove i giocatori è che la frequenza relativa di un certo evento deve avvicinarsi alla probabilità di quell'evento. Si tratta, in altre parole, del cosiddetto *postulato empirico del caso*, che possiamo formulare così:

POSTULATO EMPIRICO DEL CASO

In una sequenza di prove ripetute un numero grande di volte, nelle quali la probabilità p di un evento E sia sempre la stessa, la frequenza relativa f di E è approssimativamente uguale alla probabilità p. L'approssimazione migliora al crescere del numero delle prove effettuate.

È molto importante insistere sulla natura *non* matematica di questo "postulato", e sul suo carattere esclusivamente intuitivo e qualitativo. Sarà bene inoltre sottolineare che anche in questo caso una formulazione esplicita di questa legge si è avuta molto più tardi rispetto al suo apparire nei ragionamenti intorno alla probabilità[10].

Utilizzando le considerazioni svolte da *Emma Castelnuovo* (1993, pp. 51−57), abbiamo confrontato il caso di una malattia ereditaria, come il *morbo di Cooley*, con una malattia *non* ereditaria come la *sindrome di Down*. Nel primo caso, assumendo che la malattia si trasmetta attraverso la combinazione *casuale* dei geni del padre e della madre, è possibile calcolare *a priori,* noto il patrimonio genetico dei due genitori, qual è la probabilità che un figlio nasca con la malattia. Nel secondo caso, proprio per le caratteristiche della malattia, lo schema della probabilità classica non è più applicabile. Come possono essere allora interpretate le stime sulla probabilità che una madre, in relazione all'età, possa partorire un figlio affetto dalla sindrome di Down?
La risposta della generalità degli studenti ha riconosciuto che quella probabilità non può essere altro che una frequenza relativa determinata sulla base di una statistica.

[10] Una di queste formulazioni esplicite, forse la prima, è quella dovuta a *Guido Castelnuovo* (1919).

Chiediamo allora di analizzare questo problema.

Un urna contiene biglie di diverso colore secondo una composizione sconosciuta. Supponiamo inoltre che esista un meccanismo che consente di estrarre una sola biglia alla volta, e che questo meccanismo possa essere azionato solo dopo aver reintrodotto nell'urna una biglia eventualmente estratta in precedenza. Com'è possibile determinare la probabilità di estrarre una biglia di un determinato colore?

Non potendo conoscere la composizione dell'urna, la generalità degli studenti ha suggerito di ripetere l'estrazione un numero *grande* di volte, e di assumere la frequenza relativa registrata nelle prove effettuate come probabilità, o almeno come indicatore della probabilità. Nella discussione in classe siamo quindi giunti, capovolgendo il significato del postulato empirico del caso, a formulare una definizione frequentista di probabilità.

PROBABILITÀ FREQUENTISTA
Dato un evento E relativo all'esito di un esperimento che può essere ripetuto sempre nelle stesse condizioni, possiamo definire come probabilità di E il valore a cui tende la frequenza relativa registrata in un certo numero di prove quando questo numero viene fatto crescere indefinitamente.

Naturalmente si potrà osservare che questa definizione non è direttamente applicabile, anche nei casi più semplici, poiché non si possono effettuare infinite prove. Anche ammettendo di voler calcolare la probabilità in modo approssimato non è possibile determinare il minimo numero di prove da effettuare per ottenere una approssimazione della probabilità a meno dell'errore assegnato. Occorre quindi fissare arbitrariamente il numero n di prove da effettuare e, indicato con r il numero dei successi relativi all'evento E, definire come probabilità dell'evento E, la sua frequenza relativa[11]:

$$p(E)=\frac{r}{n}.$$

Con questa nuova definizione di probabilità ho chiesto agli studenti di verificare che le proprietà P1–P7, formulate nell'ambito della probabilità classica, sono ancora valide, e possono quindi essere utilizzate per affrontare problemi in questo nuovo ambito. Dal punto di vista storico è bene sottolineare che l'uso di frequenze relative come probabilità risale al XVIII secolo, in ambito assicurativo, e che nel corso del XIX secolo, in ambito statistico, il termine probabilità è sinonimo di frequenza relativa. Una definizione esplicita della probabilità frequentista si avrà soltanto nel Novecento, per opera di Von Mises.

Lo studio del funzionamento di un contratto assicurativo costituisce un'importante occasione per integrare la nuova definizione di probabilità con i concetti di speranza matematica e di gioco equo già introdotti nell'ambito della probabilità classica, e per mostrare che il concetto di gioco può avere un significato più ampio.

---

[11] Sarebbe forse più corretto parlare in questo caso di *probabilità statistica*, che rappresenta, nella concezione frequentista un valore approssimato della probabilità. Naturalmente statistiche diverse possono produrre probabilità statistiche diverse. La definizione frequentista offre un'interpretazione che consente di conservare, almeno in linea di principio, l'unicità della probabilità.

Finestra n.3: FISICA

IL CASO IN FISICA

Partendo dalla lettura dello scritto *Il caso* di Henri Poincaré(1995, pp. 105–124) si considera il ruolo della probabilità nella fisica. Anche nella concezione di Poincaré la probabilità è una probabilità *epistemica*, ma il suo significato si allarga a considerare quei problemi che oggi costituiscono l'oggetto della teoria del *caos*. Si è considerato inoltre che le probabilità che intervengono nella teoria cinetica dei gas di Maxwell e di Boltzmann sono concepite come frequenze relative.

LA LEGGE DI BAYES

In questa tappa del percorso gli studenti sono stati guidati a scoprire la legge di Bayes, partendo dall'esame di un problema tratto da *Piattelli Palmarini* (1993, p. 89). Mi è sembrato opportuno introdurre questo argomento a questo punto del percorso perché gli esempi più interessanti di applicazione della legge di Bayes sono quelli in cui le probabilità in gioco sono delle frequenze relative.

SOFISMA DEL GIURATO

Siete membro di una giuria popolare. Un tassista è accusato di aver investito un passante in una notte tempestosa, e di essere poi fuggito senza prestare aiuto. Il pubblico ministero, nel richiedere la condanna dell'imputato, basa tutto sulla testimonianza di una anziana signora che dalla sua finestra, a una certa distanza, ha visto l'incidente. La signora afferma di aver visto investire il malcapitato da un taxi blu, e di aver poi visto fuggire il taxi. L'imputato lavora in una compagnia di taxi che possiede solo macchine blu. Nel corso dell'istruttoria e del dibattito processuale è emerso quanto segue :

1) in quella città operano due sole compagnie di taxi, una che ha tutte le vetture verdi, e una che ha tutte le vetture blu. Di tutti i taxi circolanti quella notte circa l'85% erano verdi e circa il 15% erano blu;
2) la signora, testimone a carico, sulla base di ripetute prove di acutezza visiva, effetuate dal giudice istruttore in condizioni di illuminazione molto simili a quelle della notte dell'incidente, ha dimostrato di saper correttamente identificare un taxi blu, rispetto ad uno verde, 80 volte su 100.

Sulla base della testimonianza giurata della signora, e sulla base dei dati 1) e 2), qual è la probabilità che il taxi fosse veramente blu?

Ho domandato agli studenti, per cominciare, che tipo di probabilità fossero quelle indicate dal problema, per osservare che mentre la probabilità che il taxi fosse blu o verde ammette una interpretazione classica, se si ipotizza che la presenza del taxi sul luogo del delitto fosse casuale, la probabilità che misura l'acutezza visiva della teste non può essere che una frequenza relativa, qualunque sia stato il modo di determinarla effettivamente.

Prima di affrontare nel dettaglio l'esame di questo problema, ho chiesto agli studenti di stimare, in modo qualitativo, quella probabilità. Le risposte date dagli studenti sono state per probabilità comprese tra il 50% e il 90%. La maggioranza degli studenti ha valutato quella probabilità intorno all'80%.

Nell'esame di questo problema dobbiamo partire dalla distinzione tra gli eventi:

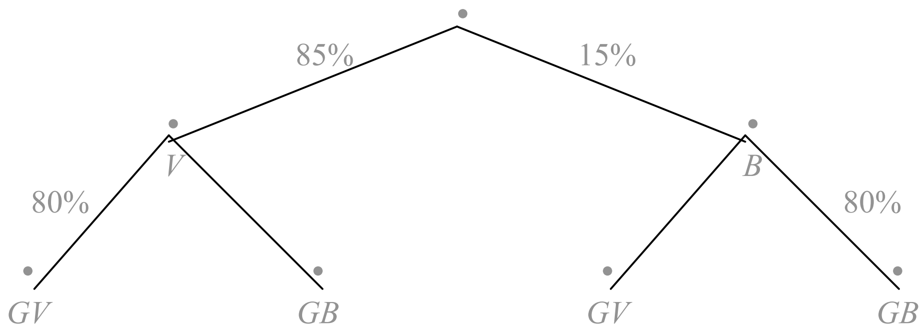
B = "il taxi era blu",

e

TB = "la teste ha visto un taxi blu".

Se non si tiene conto della testimonianza della signora, la probabilità che il taxi presente sul luogo del delitto fosse blu è: $p(B) = 15\%$. Se invece si tiene conto della testimonianza questa probabilità subisce un vero balzo, giungendo a superare, nelle stime degli studenti, il 50%.
È verosimile? C'è un modo per calcolare effettivamente $p(B|TB)$?

Abbiamo rappresentato il problema con uno schema ad albero:



e abbiamo messo in evidenza che cosa conosciamo:

- $p(V)$, $p(B)$ (*probabilità a priori* o *probabilità delle ipotesi*)
- $p(TV|V)$, $p(TV|B)$, $p(TB|B)$, $p(TB|B)$ (*verosimiglianze*)

e che cosa intendiamo determinare:

- $p(B|TB)$ (*probabilità a posteriori*)

Ho proposto quindi agli studenti di riflettere a casa su questo problema, suggerendo di tener conto della legge del prodotto.

Nella lezione successiva ho invitato gli studenti ad esporre le conclusioni a cui sono giunti.
La maggior parte di loro è arrivata a determinare, correttamente, che:

$$p(B|TB) = \frac{p(B) \cdot p(TB|B)}{p(TB)},$$

ma non è riuscita ad utilizzare questa formula perché non conosceva il denominatore $p(TB)$.
Alcuni degli altri studenti hanno dichiarato di essere riusciti a risolvere il problema, determinando l'evento *TB* a partire dalla rappresentazione ad albero.
Ho chiesto quindi a tutti gli studenti di riflettere sullo schema ad albero per determinare l'evento *TB* a partire dagli eventi rappresentati. Si è potuto quindi riconoscere che:

$$TB = (V \cap TB) \cup (B \cap TB),$$

e quindi determinare:

$$p(TB) = p(V) \cdot p(TB|V) + p(B) \cdot p(TB|B).$$

Sostituendo questa espressione nella formula trovata prima, abbiamo quindi ottenuto:

$$p(B|TB) = \frac{p(B)\cdot p(TB|B)}{p(V)\cdot p(TB|V) + p(B)\cdot p(TB|B)}$$

che rappresenta la legge di Bayes nel caso più semplice: quello di due sole ipotesi alternative. Questa formula ha consentito di risolvere il problema iniziale, e quindi di ottenere che la probabilità cercata è $p(B|TB) = 41\%$.

Abbiamo chiesto agli studenti di riflettere sul perché avessero sbagliato in modo così clamoroso la stima iniziale. Gli studenti che avevano dichiarato una probabilità dell'80% hanno riconosciuto di aver posto $p(B|TB) = p(TB|B)$, identificando la probabilità cercata con l'acutezza visiva della teste, senza tenere conto della proporzione tra i taxi delle due compagnie.

Abbiamo proposto agli studenti di generalizzare il risultato ottenuto al caso in cui le ipotesi iniziali siano in numero *n* (con $n \geq 2$). Una volta esplicitato il concetto di *insieme di alternative*[12] abbiamo potuto formulare la legge di Bayes nella sua forma più generale.

P8) *Legge di Bayes*:

Se una famiglia di eventi $H_1, H_2, ..., H_n$ costituisce un *insieme di alternative* di Ω, allora per ogni evento *E* si ha:

$$p(H_i|E) = \frac{p(E|H_i)\cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(E|H_j)\cdot p(H_j)}.$$

Abbiamo poi esaminato molti problemi interessanti in cui si applica la legge di Bayes, tra i quali segnaliamo quelli proposti in *Maraschini e Palma*(1994, pp. 231–236).

L'esame di numerosi ambiti applicativi per la legge di Bayes ha consentito di mettere in evidenza come questa proprietà possa fornire una rappresentazione di come la nostra conoscenza si accresca mediante l'esperienza. Se interpretiamo le alternative $H_1, H_2, ..., H_n$, come *ipotesi sperimentali*, e un certo evento *E* come il *risultato di un esperimento*, la legge di Bayes ci consente di misurare quanto l'osservazione di *E* modifichi le probabilità delle ipotesi. Nel caso in cui $p(H_i|E) \geq p(H_i)$ si può affermare che l'esito dell'esperimento *conferma* l'ipotesi.

In questo contesto è stato interessante tornare a considerare il caso di estrazioni di biglie da un'urna la cui composizione è ignota. Supponiamo di sapere che quell'urna contiene un numero *n* (che deve essere piccolo per condurre efficacemente un'analisi) di due colori diversi, ma di non poterla svuotare, e quindi di dover ogni volta reintrodurre la biglia estratta nell'urna. È interessante simulare il modificarsi della probabilità delle diverse possibili composizioni, col procedere dell'esperienza, cioè con l'osservazione delle biglie estratte.

---

[12] Una famiglia di eventi $H_1, H_2, ..., H_n$ costituisce un *insieme di alternative* se soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $H_i \cap H_j = \varnothing$, per ogni $i \neq j$ (*incompatibilità*);

(2) $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega$ (*esaustività*);

(3) $P(H_i) \neq 0$, per ogni *i*.

CRITICA DELLA DEFINIZIONE FREQUENTISTA

Dopo avere esplorato l'efficacia della definizione frequentista in molti problemi significativi, abbiamo sottoposto ad una analisi critica questo punto di vista. In particolare, seguendo il metodo già adottato per la probabilità classica, ho cominciato col chiedere agli studenti:

Che cosa ti convince e che cosa non ti convince della definizione frequentista di probabilità?

Le risposte formulate dagli studenti hanno mostrato, innanzitutto, la consapevolezza delle grandi possibilità applicative di questa nuova definizione. Dal punto di vista critico, sono riaffiorate tutte quelle difficoltà che si erano già riscontrate nel formulare la definizione:

1) la probabilità è concepita come valore limite delle frequenze relative quando il numero delle prove tende all'infinito, ma la successione delle frequenze relative dipende dalle prove fatte e quindi non c'è alcuna garanzia che questo valore limite esista o sia lo stesso per ogni possibile successione di prove;

2) questa difficoltà si riscontra, a maggior ragione, quando si assume come probabilità la frequenza relativa in una data sequenza finita di prove, sapendo che una diversa sequenza avrebbe potuto presentare un'altra frequenza relativa;

3) quando si pone $p(E)=\frac{r}{n}$, si intuisce che n debba essere *grande*, ma questo termine è del tutto qualitativo e non c'è un criterio per decidere se un dato numero di prove sia abbastanza grande;

4) come si può utilizzare la frequenza relativa come approssimazione del valore limite, se non si è neppure in grado di stimare l'errore di questa approssimazione?

5) nella concezione frequentista la possibilità di definire la probabilità di un evento E è condizionata al poter ripetere indefinitamente un certo esperimento nelle stesse condizioni: è sempre possibile identificare queste condizioni o stabilire se sono verificate?

Molti, richiamando anche il punto 2.c del questionario iniziale, hanno inoltre osservato che anche la probabilità frequentista, come quella classica, non è applicabile in ogni contesto.

Al termine di questa discussione abbiamo chiesto agli studenti di mettere a confronto le due definizioni di probabilità date fino a questo punto. Nella discussione sono emerse, stimolate anche da opportune domande, le seguenti osservazioni:

1) entrambe le definizioni si fondano su due ipotesi molto restrittive: l'equiprobabilità degli eventi elementari, per la probabilità classica, e la ripetibilità indefinita di un certo esperimento nelle stesse condizioni per la probabilità frequentista;

2) entrambe le definizioni conducono ad una probabilità che soddisfa le proprietà P1–P8;

3) la definizione classica, nei casi in cui è applicabile, permette di calcolare la probabilità di un evento, mentre la definizione frequentista consente di calcolare solo un'approssimazione della probabilità, senza stimare l'errore commesso;

4) la definizione frequentista appare come più generale poiché sembra applicabile a tutti i casi a cui è applicabile la definizione classica, mentre non è vero il viceversa;

5) nei casi in cui sono applicabili entrambi i punti di vista, la convergenza tra le due definizioni è asserita dal *postulato empirico del caso*.

FINESTRA N.4: FISICA

PROBABILITÀ E FISICA

Partendo dalla lettura di un passo tratto da un libro di *Ghirardi* (1997, pp. 55–59) si confrontano le concezioni *epistemiche* della probabilità di Laplace e Poincaré, con la concezione *non epistemica* (*ontologica*) introdotta dalla fisica quantistica.

LA PROBABILITÀ SOGGETTIVA

In questa tappa del percorso la probabilità soggettiva viene presentata come un terzo possibile punto di vista che consente di superare alcuni dei problemi incontrati nelle altre due definizioni. Siamo partiti da una riflessione sul comportamento dei giocatori nell'ambito delle scommesse suggerita dal seguente problema.

Un allibratore (bookmaker) fissa la quota per le scommesse su un dato evento, come ad esempio la vittoria di un certo cavallo X in una corsa, affermando "accetto scommesse, 5 contro 1, sul cavallo X". Questo significa che è disposto a dare 5 volte la somma puntata da uno scommettitore nel caso in cui il cavallo arrivi primo nella corsa. Se il signor Smith è disposto a scommettere, versando 1 sterlina, in caso di vincita riceverà 1+5=6 sterline, mentre in caso contrario avrà perso la sterlina scommessa. Quale probabilità assegna alla vittoria del cavallo il signor Smith?

Gli studenti, che avevano già familiarizzato con la rappresentazione dei giochi in termini di speranza matematica hanno osservato che per poter risolvere il problema è necessario ipotizzare che la scommessa a cui partecipa il signor Smith sia un *gioco equo*: se così non fosse o il signor Smith o l'allibratore non avrebbero interesse a partecipare al gioco. Fatta questa ipotesi, e quindi fissata la speranza matematica del gioco, si può determinare la probabilità che il cavallo X vinca la corsa.

Possiamo riassumere i dati del gioco nel seguente schema:

Somma	−1	+6
Probabilità	1	*P*

dove p rappresenta la probabilità incognita, quella cioè che il cavallo X vinca la corsa.

Possiamo esprimere la speranza matematica del signor Smith:

$$S = (-1)\cdot 1 + (+6)\cdot p\,,$$

e sapendo, per l'ipotesi che il gioco sia equo, che essa è nulla, ricavare infine la probabilità cercata:

$$p = \frac{1}{6}.$$

Gli studenti saranno invitati a generalizzare questo risultato.

PROBABILITÀ NELLE SCOMMESSE

Se un evento E, nell'ambito di una scommessa, viene dato "x contro y" e se si ipotizza che la scommessa sia un gioco equo, la probabilità dell'evento E, risulta essere:

$$p(E)=\frac{y}{x+y}.$$

Nelle scommesse i numeri x e y sono numeri interi, ma lo schema può essere generalizzato al caso che essi siano numeri reali positivi.
Mettiamo a confronto il caso appena esaminato della scommessa del signor Smith con quello di altri giochi esaminati in precedenza[13]. In questi la probabilità di un certo evento E, che corrisponde alla vittoria per uno dei due giocatori, era nota in partenza, e il concetto di gioco equo veniva utilizzato per determinare la somma da versare per partecipare al gioco, nota la vincita (o viceversa). Ora, al contrario, partendo dalle quote della scommessa e dall'ipotesi che essa possa essere considerata un gioco equo, abbiamo determinato la probabilità dell'evento oggetto della scommessa. Ciò significa, in altre parole, che nel fissare le quote della scommessa e nel giudicarla equa, l'allibratore e il signor Smith assegnano una certa probabilità all'evento E. Questo schema di ragionamento suggerisce una nuova definizione di probabilità, quella *soggettiva*. Ho proposto alla classe la seguente definizione, ispirata a quella formulata da *De Finetti* (1937, p. 6), che utilizza il riferimento allo schema delle scommesse.

PROBABILITÀ SOGGETTIVA (1)
La probabilità di un evento E è il prezzo che un individuo giudica equo pagare per ricevere un importo unitario nel caso che l'evento E si verifichi.

Ho chiesto agli studenti di verificare che questa definizione è coerente con lo schema delle scommesse. Facendo riferimento alla rappresentazione del gioco, si distinguono la somma s che l'individuo ritiene equo di dover pagare per partecipare al gioco, dalla probabilità p dell'evento E:

Somma	$-s$	$+1$
Probabilità	1	p

Se calcoliamo la speranza matematica dell'individuo:

$$S=(-s)\cdot 1+(+1)\cdot p,$$

e la poniamo uguale a zero (gioco equo), otteniamo:

$$s=p.$$

Ho posto quindi agli studenti il seguente problema, sul quale li ho invitati a riflettere individualmente.

Supponiamo che il signor Smith scommetta con un certo allibratore sul verificarsi dell'evento E, e con un altro allibratore sul verificarsi dell'evento contrario $\overline{E}$. Che relazione deve intercorrere tra le probabilità p dell'evento E e la probabilità q dell'evento $\overline{E}$?

[13] Generalmente abbiamo esaminato dei giochi d'azzardo nell'ambito della probabilità classica. Nel caso di un contratto assicurativo però, la probabilità che interviene è una frequenza relativa.

Gli studenti saranno portati a rispondere subito che $p+q=1$, ma occorrerà metterli sull'avviso che questo risultato (la proprietà P3) è stato finora ottenuto sulla base di due definizioni di probabilità diverse da quella che stiamo esaminando. Ho quindi suggerito di considerare il gioco determinato dalla combinazione delle due scommesse.

Nella lezione successiva alcuni studenti illustrano il ragionamento che ha permesso loro di verificare che $p+q=1$. Guardando alla combinazione delle due scommesse, il signor Smith si trova nella seguente situazione: egli versa $p+q$, che è uguale alla somma delle quote versate separatamente nelle due scommesse, per ricevere la somma +1 in modo certo, dal momento che si dovrà verificare l'evento *E* o il suo contrario (e quindi egli dovrà vincere una scommessa, perdendo l'altra). Riassumendo, la combinazione delle due scommesse può essere così rappresentata:

Somma	$-(p+q)$	+1
Probabilità	1	1

Quindi, nell'ipotesi di equità del gioco, si ricava:

$$S=-(p+q)\cdot 1+(+1)\cdot 1=0,$$

da cui:

$$p+q=1.$$

Occorre però far riflettere gli studenti su un fatto che potrebbe essere stato trascurato nel ragionamento. Abbiamo infatti ipotizzato che la combinazione delle due scommesse debba essere un gioco equo, cioè, in altre parole, che questa combinazione non dia luogo ad un guadagno o ad una perdita certa per il signor Smith. Ma questo non discende dalla definizione, per la quale l'individuo deve ritenere equo pagare una certa quota in ogni singola scommessa. L'avere esteso la nozione di equità alla combinazione delle due scommesse equivale ad affermare che il signor Smith, nel giudicare le quote delle due scommesse, e quindi le probabilità di un evento e del suo contrario, non può comportarsi in modo arbitrario: deve scegliere $p(E)$ e $p(\overline{E})$ in modo che $p(E)+p(\overline{E})=1$.

Occorre quindi correggere la definizione di probabilità imponendo quella che De Finetti chiama condizione di *coerenza*.

> PROBABILITÀ SOGGETTIVA (2)
> La probabilità di un evento *E* è il prezzo che un individuo *coerente* giudica equo pagare per ricevere un importo unitario nel caso che l'evento *E* si verifichi. Un individuo si dice *coerente* se nessuna combinazione di scommesse eque a cui partecipa gli consente di realizzare un guadagno o una perdita certa.

Proponiamo infine la definizione formulata da *Daboni* (1980, p. 18), nella quale non si utilizza il riferimento alle scommesse. Questa nuova definizione è equivalente a quella proposta da De Finetti, ma si presenta in una forma più generale.

> PROBABILITÀ SOGGETTIVA (3)
> La probabilità di un evento *E* è la misura del grado di fiducia che un individuo *coerente* attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di *E*.

La definizione (2), per il suo aspetto più operativo, consente di formulare la condizione di coerenza in modo più efficace.

Ho chiesto agli studenti di dimostrare le proprietà P1–P8[14] anche per la probabilità soggettiva, utilizzando la definizione (2)[15]. Per provare la proprietà P7, cioè la legge del prodotto (la legge di Bayes è una sua diretta conseguenza la cui dimostrazione prescinde dall'interpretazione della probabilità) occorre però riformulare la definizione di probabilità condizionata in termini soggettivi[16].

Ho proposto quindi agli studenti di riflettere sulla seguente domanda.

Che cosa ti convince e che cosa non ti convince della definizione soggettiva di probabilità?

La maggior parte delle risposte ha mostrato, in positivo, il carattere più generale di questa nuova definizione. Essa non fa infatti fa riferimento ad ipotesi restrittive come l'equiprobabilità degli eventi elementari della probabilità classica, o la ripetibilità indefinita di un esperimento nelle stesse condizioni della probabilità frequentista. Qualcuno ha obiettato che la definizione soggettiva presuppone la coerenza dell'individuo, ma ha poi dovuto riconoscere che quella condizione esprime una regola di comportamento per l'individuo che esprime una valutazione di probabilità, e quindi non rappresenta una ipotesi di cui dover presupporre la validità.
In negativo, gli studenti hanno osservato:

1) che la definizione soggettiva non fornisce una *ricetta* per calcolare la probabilità di un evento, cioè per tradurre la fiducia che l'individuo nutre nel verificarsi di un certo evento in un numero che ne esprima il grado;

2) che la probabilità soggettiva non è …oggettiva: due individui coerenti e in possesso delle stesse informazioni possono attribuire diverse valutazioni di probabilità ad uno stesso evento.

Quest'ultimo rilievo viene sentito come il limite più evidente della definizione e per alcuni costituisce un ostacolo insuperabile alla possibilità di affrontare in termini *razionali* o *scientifici* lo studio della probabilità.

Abbiamo letto in classe un brano di De Finetti (v. Appendice), nel quale si mette a confronto la concezione soggettiva con le definizioni classica e frequentista.

---

[14] La dimostrazione della proprietà P3 è già stata ottenuta in precedenza.

[15] Il riferimento allo schema delle scommesse consente un'interpretazione che si rivela molto utile nella dimostrazione delle proprietà.

[16] $p(B|A)$ è il prezzo che un individuo coerente giudica equo versare per ricevere un importo unitario al verificarsi dell'evento *B* quando questo prezzo sia valutato nell'ipotesi che *A* sia vero. Per ricavare la legge del prodotto occorre osservare che se un individuo coerente giudica equo, scommettendo su *A*:

pagare $p(A)$ per ricevere 1,

dovrà allora giudicare equo anche:

pagare $p(A)\cdot p(B|A)$ per ricevere $p(B|A)$ [1].

Se *A* è vero, quello stesso individuo giudica equo, scommettendo su *B*:

pagare $p(B|A)$ per ricevere 1 [2].

Combinando le scommesse [1] e [2], il nostro individuo deve giudicare equo, scommettendo su $A \cap B$:

pagare $p(A)\cdot p(B|A)$ per ricevere 1.

Ma il prezzo di quest'ultima scommessa è proprio, per definizione, la probabilità di $A \cap B$.

Lettura n.4

LA VALUTAZIONE DI UNA PROBABILITÀ

La discussione che è seguita ha permesso di tornare a considerare la concezione soggettiva in rapporto alle altre definizioni. Anche se gli argomenti di De Finetti non riescono a far superare le perplessità sollevate da questa concezione, viene apprezzato il tentativo di considerare la definizione classica e la definizione frequentista come criteri per una *valutazione* della probabilità in particolari contesti.

LA DEFINIZIONE ASSIOMATICA

Lo studio della definizione soggettiva ci ha condotto a determinare le proprietà della probabilità in modo indipendente da ogni sua possibile valutazione. Due individui coerenti possono cioè attribuire misure diverse delle probabilità di eventi riferiti ad uno stesso esperimento, ma quelle due valutazioni godono entrambe delle proprietà P1−P8. Se c'è un parallelo tra logica e probabilità conviene richiamare la distinzione che, nella prima, si opera tra *sintassi* e *semantica*. Trascurando per il momento il modo con cui attribuire un valore di probabilità ad un certo evento, chiediamoci quali siano, tra le proprietà studiate, quelle che consentono di ricavare tutte le altre.
Ho quindi proposto agli studenti di determinare, tra le proprietà, P1−P8, quali siano state dimostrate a partire dalle definizioni date, di volta in volta, di probabilità e quali invece si possano ricavare direttamente dalle altre. Gli studenti hanno osservato che:

1) nella dimostrazione delle proprietà P1, P2, P3, P4, P6 e P7 sono intervenute direttamente le definizioni;
2) P4 implica P5;
3) P6 implica P4
4) P7 implica P8.

Qualcuno ha notato inoltre che la P3 è legata alla P4: se ipotizziamo che $p(A) \geq 0$, applicando la P4 all'evento *A* e al suo contrario, si ricava che $p(A) \leq 1$.
Ho quindi presentato alla classe la definizione assiomatica di probabilità[17].

[17] Quella proposta, in sostanza, è quella che si trova, ad esempio, in *Prodi* (1992, p. 185). Poiché ci siamo limitati ad esaminare casi finiti, non appare necessario imporre che $\mathfrak{I}$ sia una $\sigma -$algebra e generalizzare l'additività finita (l'assioma B3) con l'additività infinita.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÀ

A) *Rappresentazione insiemistica degli eventi*
Sia Ω (*spazio campione*) un insieme e sia $\Im$ (*famiglia di eventi*) una famiglia di sottoinsiemi di Ω con le seguenti proprietà:
A1) l'insieme vuoto $\varnothing$ e l'insieme Ω appartengono a $\Im$
A2) se gli insiemi *A* e *B* appartengono a $\Im$, anche la loro unione $A \cup B$ e la loro intersezione $A \cap B$ appartengono a $\Im$;
A3) se l'insieme *A* appartiene a $\Im$ anche il suo complementare $\overline{A}$ appartiene a $\Im$.

B) *Assegnazione della probabilità*
Si dice *probabilità* una funzione *p* definita in $\Im$, a valori reali non negativi, con le seguenti proprietà:
B1) $p(\varnothing) = 0$
B2) $p(\Omega) = 1$
B3) se $A \cap B = \varnothing$ allora $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Per prima cosa abbiamo osservato che gli assiomi A1–A3 formalizzano la rappresentazione degli eventi come insiemi, e delle operazioni sugli eventi come operazioni insiemistiche[18]. Gli assiomi B1–B3 coincidono con le proprietà che abbiamo indicato fin qui con P1–P3. Sarà bene sottolineare però che, a differenza di quanto avvenuto nell'ambito delle diverse concezioni esaminate, quelle proprietà non possono essere dimostrate e sono anzi assunte come proprietà caratterizzanti della probabilità. Analogamente a ciò che avviene in geometria, dove non si danno le definizioni di punto, retta e piano e gli assiomi servono a descrivere quegli enti attraverso le relazioni che li caratterizzano, nell'ambito dell'impostazione assiomatica non si dice esplicitamente come si debba calcolare la probabilità di un evento ma, attraverso gli assiomi, si caratterizza ogni possibile probabilità. A questo punto ho chiesto agli studenti, anche utilizzando le osservazioni fatte a proposito delle relazioni tra le proprietà P1–P8, di dimostrare, a partire dagli assiomi, tutte le proprietà già incontrate[19]. Per far questo occorre però introdurre come definizione di probabilità condizionata, la relazione:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{, nel caso in cui } p(A) \neq 0 \text{,}$$

che equivale ad assumere la regola del prodotto come ulteriore assioma della teoria.

Per introdurre una riflessione conclusiva sul percorso seguito, ho proposto agli studenti la lettura individuale di due brani (v. Appendice). Nel primo De Finetti, tornando sulla polemica fra soggettivismo e oggettivismo, chiarisce anche la sua interpretazione del calcolo delle probabilità come *logica del probabile*. Nel secondo, Giovanni Prodi riflette sulla separazione tra lo studio matematico della probabilità e la riflessione intorno alle interpretazioni di questo concetto. Riprendendo l'analogia tra probabilità e logica, Prodi interpreta la prima come generalizzazione della seconda.

---

[18] Nei casi che abbiamo analizzato e che analizzeremo, lo spazio campione è sempre finito. La scelta più naturale come famiglia degli eventi è rappresentata dell'insieme delle parti. La generalizzazione proposta dagli assiomi A1-A3 può essere apprezzata solo nello studio di casi infiniti che esulano dai limiti imposti a questo percorso.
[19] Quella meno immediata appare la P6. Per dimostrarla occorre considerare le due unioni di eventi incompatibili: $A \cup B = (A - B) \cup B$ e $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, e applicare ad entrambe l'assioma B3.

Lettura n.5

LA LOGICA DEL PROBABILE

Lettura n.6

PROBABILITÀ: TEORIA E CALCOLO

Nel corso della discussione che è seguita alla lettura dei documenti proposti, sono emerse le seguenti osservazioni:

1) la separazione tra Calcolo e Teoria delle probabilità, per usare la distinzione proposta da Prodi, avviene, in modo consapevole, solo dopo alcuni secoli di studi statistico-probabilistici; gli studi svolti nell'ambito delle diverse concezioni della probabilità che abbiamo incontrato (classica, frequentista e soggettiva) rispondevano contemporaneamente all'esigenza di dare un significato alla probabilità e di indagarne le proprietà matematiche, in vista della loro possibile applicazione;

2) nel passaggio dalle concezioni classica e frequentista alla concezione soggettiva abbiamo dovuto abbandonare la pretesa di definire un'unica probabilità per ogni evento in relazione ad un dato esperimento;

3) abbiamo usato, indifferentemente, i termini *definizione* e *concezione* a proposito delle diverse interpretazioni della probabilità; le definizioni sottostanti alle diverse concezioni rappresentano il tentativo di dare un significato alla probabilità e un modo per calcolarla; nel caso dell'impostazione assiomatica, invece, la definizione da cui si parte non dice che cos'è o come si debba calcolare la probabilità: in essa si individuano quelle condizioni minime a cui deve sottostare ogni possibile probabilità;

4) la definizione assiomatica ha un potere unificante proprio perché consente di interpretare le diverse *definizioni* di probabilità come delle particolari funzioni–probabilità (o *misure di probabilità*);

5) il prezzo di questa conquista è evidente: lo studio matematico della probabilità, a partire dalla definizione assiomatica, prescinde da quale significato si voglia attribuire alla probabilità, in relazione all'esperienza; in modo analogo a ciò che avviene nella logica proposizionale, dove, assegnati i valori di verità (non importa come) ad alcune proposizioni (quelle atomiche) si determina la verità delle proposizioni composte (quelle ottenute dalle proposizioni atomiche applicando le operazioni logiche), nel calcolo delle probabilità, assegnate le probabilità (non importa come) agli eventi elementari, si determinano le probabilità degli eventi composti, ottenuti da quelli elementari mediante le operazioni sugli eventi.

Lo studio della definizione assiomatica di probabilità ha rappresentato l'occasione per una riflessione sulle caratteristiche di una teoria ipotetico-deduttiva:

a) riguardo al ruolo che in essa svolgono gli assiomi e i teoremi, al significato delle dimostrazioni;
b) per fare apprezzare che la costruzione di una teoria ipotetico-deduttiva non avviene mai in modo arbitrario: è il risultato di un processo storico nel quale vengono messi a fuoco, progressivamente, dei risultati importanti, e solo successivamente viene selezionato

quell'insieme minimale di proprietà (gli assiomi) a partire dalle quali è possibile ottenere tutti i risultati significativi (teoremi).

FINESTRA N.5: FILOSOFIA

PROBABILITÀ E LOGICA INDUTTIVA

Dopo aver richiamato le relazioni tra probabilità e logica esaminate nelle Letture nn. 5−6, e il ruolo della legge di Bayes nella rappresentazione del ragionamento induttivo, si considera il tentativo di costruzione di una logica induttiva a partire dallo studio della probabilità. Per questo tema si è fatto riferimento a *Costantini* e *Mondadori*(1973).

LE NOSTRE CONCEZIONI ALLA PROVA: IL DILEMMA DI MONTY HALL

Abbiamo già avuto modo di osservare che il coinvolgimento degli studenti nelle attività del percorso è stato motivato dalla convinzione che nello studio della probabilità fosse in gioco qualcosa di personale, qualcosa che aveva a che fare col proprio punto di vista e col proprio comportamento di fronte all'incertezza. Tenuto conto di questo, e dell'interesse che in generale gli studenti mostrano per le situazioni paradossali, si è pensato di chiudere il percorso, con l'esame di un paradosso che ha sollevato, in passato, aspre polemiche tra gli studiosi e che ha messo a dura prova anche esperti di fama internazionale[20].

IL GIOCO DELLE TRE SCATOLE
(dilemma di Monty Hall)

Partecipi ad un gioco a premi nel quale ti vengono mostrate tre scatole identiche, ognuna provvista di coperchio. In una di queste scatole è contenuto un assegno da 1.000.000 di euro, mentre le altre due sono vuote. Se indovini qual è la scatola piena vinci l'assegno, altrimenti non vinci niente. Il conduttore del gioco, naturalmente, conosce in anticipo in quale scatola è contenuto l'assegno.
Il gioco si svolge in due tempi : nel primo, tu indichi quale scatola hai scelto. Appena avrai scelto la scatola il conduttore solleverà il coperchio di un'altra scatola, una delle due rimanenti, che sarà sempre vuota, dal momento che il conduttore conosce già qual è la scatola che contiene l'assegno. (Questo vuol dire che nel caso in cui tu abbia scelto, ovviamente senza saperlo, una scatola vuota, il conduttore aprirà comunque l'altra scatola vuota. Nel caso in cui, invece, sempre senza saperlo, tu abbia scelto quella giusta, quella con l'assegno dentro, il conduttore aprirà indifferentemente una delle due scatole vuote). Ti trovi dunque due scatole chiuse, una delle quali conterrà sicuramente l'assegno.
A questo punto il conduttore ti dà la possibilità di *conservare* la prima scelta o di spostarla sull'altra scatola chiusa.
Come regola generale, ti converrà mantenere la prima scelta o cambiare?

Ho chiesto agli studenti di analizzare individualmente, a casa, il problema e di scrivere le proprie riflessioni.

Nella lezione successiva ho domandato agli studenti quale strategia ritenessero preferibile.

[20] Per un esame, anche psicologico, di questo paradosso si veda *Piattelli Palmarini* (1993, pp. 167−175). Un'analisi interessante di questo dilemma, nella formulazione equivalente che è nota come *paradosso del carceriere*, si trova in *Baclawski, Cerasoli e Rota* (1984, pp. 90−93). A titolo di curiosità, ma anche per mostrare agli studenti che questo dilemma ha messo a dura prova le menti più brillanti, può essere interessante leggere in *Hoffmann* (1999, pp. 215−220), come il grande matematico ungherese Paul Erdös si comportò di fronte a questo problema. Nello stesso libro si vedano le reazioni della comunità matematica statunitense alla pubblicazione del dilemma.

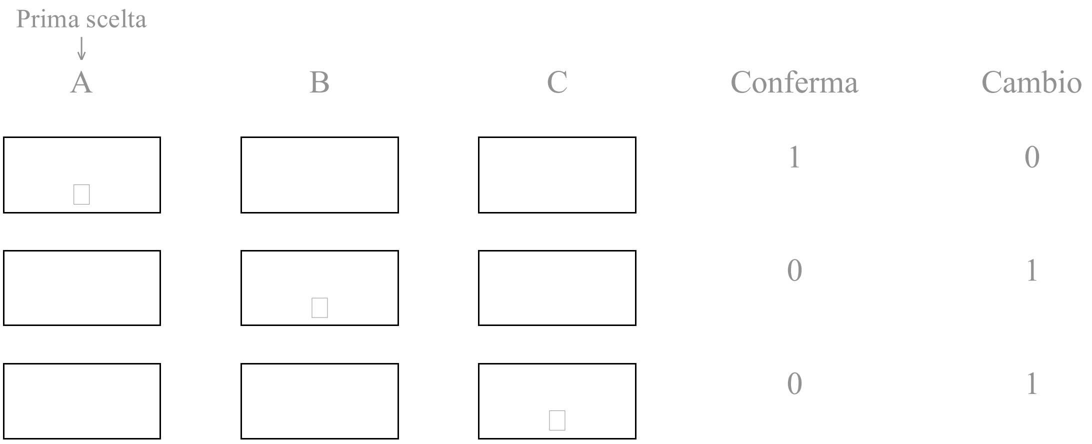
La maggioranza ha risposto che era del tutto indifferente mantenere la scelta iniziale o cambiare scatola. Alcuni studenti hanno invece risposto che ritenevano preferibile cambiare scelta perché questa strategia aumenta la probabilità di vincere.

Ho quindi chiesto agli studenti di giustificare le loro conclusioni.
Coloro che si sono espressi per l'indifferenza tra confermare e cambiare la scatola iniziale, hanno giustificato la loro conclusione affermando che la probabilità che l'assegno sia contenuto in una delle due scatole rimaste chiuse dopo l'intervento del conduttore, è la stessa, e quindi che sia indifferente confermare o cambiare la scelta iniziale.
C'è però da segnalare che una ragazza, che pure ha sostenuto questo punto di vista, ha riconosciuto una difficoltà. Nel ragionamento seguito si è infatti ammesso, implicitamente che il conduttore intervenga in modo casuale. Al contrario, la scelta del conduttore non è, in generale, fatta a caso: se la scelta iniziale è caduta su una scatola vuota, il conduttore è obbligato ad aprire l'altra scatola vuota.

Tra coloro che si sono espressi per il cambiamento della scelta iniziale, si segnala questa riflessione:

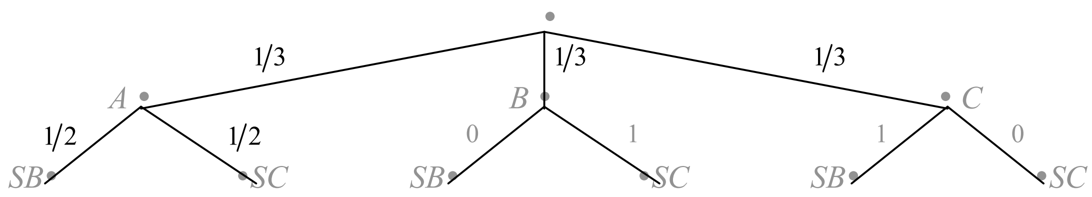
La prima risposta a cui ho pensato è che fosse del tutto indifferente cambiare o non cambiare scatola. Ma è una risposta troppo semplice… Inizialmente la probabilità che il premio sia in ciascuna delle tre scatole è 1/3. Se io ho scelto la scatola A, il conduttore nello scoprire una delle altre due scatole, trasferisce a quella coperta la probabilità dell'altra. La probabilità che la scatola che non avevo scelto inizialmente e che è rimasta chiusa, contenga il premio, diventa 2/3. È quindi preferibile cambiare la scelta iniziale.

Su questa osservazione si è aperta una vivace discussione tra gli studenti. Ho allora invitato tutta la classe a cercare una schematizzazione del problema che consentisse di analizzare tutti i casi possibili e di determinare in modo convincente le probabilità necessarie per definire il proprio comportamento.
Tra le risposte trovate dagli studenti si segnala in particolare questa rappresentazione, nella quale, sono messi a confronto i casi possibili, nell'ipotesi che il giocatore abbia inizialmente scelto la scatola A.



La rappresentazione mostra che il giocatore, cambiando la sua scelta iniziale, vince l'assegno in due casi su tre e quindi che la probabilità che l'assegno sia contenuto nella scatola chiusa che non aveva scelto inizialmente è 2/3.

Ho suggerito poi di utilizzare una diversa rappresentazione, osservando che le probabilità a cui siamo interessati sono delle probabilità condizionate, e quindi che possa essere utile ricorrere ad uno schema ad albero. Per fissare le idee supponiamo che il giocatore scelga inizialmente la scatola A.



Supponiamo poi che il conduttore apra la scatola *C*. Per calcolare la probabilità che l'assegno sia contenuto nella scatola *B*, dopo che il conduttore ha aperto la scatola *C*, possiamo ricorrere alla legge di Bayes:

$$p(B|SC) = \frac{p(B)\cdot p(SC|B)}{p(A)\cdot p(SC|A) + p(B)\cdot p(SC|B) + p(C)\cdot p(SC|C)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Questa seconda rappresentazione, non solo conferma le conclusioni precedenti, ma consente anche di fare un'altra, importantissima considerazione. Nella rappresentazione del gioco abbiamo dato per scontato che il conduttore scelga la scatola da aprire (quando può scegliere) in modo casuale, ponendo $p(SB|A) = p(SC|A) = \frac{1}{2}$. Questa considerazione è però un'ipotesi aggiuntiva: se la scelta del conduttore avvenisse in modo diverso, la situazione potrebbe cambiare in modo significativo. Più in generale, se poniamo $p(SC|A) = p$, si ha una diversa probabilità che l'assegno sia contenuto nella scatola B:

$$p(B|SC) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot p + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{1}{p+1}$$

L'esame dei diversi casi che si possono avere in relazione ai valori di *p* (compresi i casi *deterministici* in cui $p = 0$ o $p = 1$) consentono di trarre interessanti conclusioni sul significato di questo dilemma e sul nostro atteggiamento nei confronti della probabilità.

VALUTAZIONE

L'esperienza didattica che abbiamo condotto ha consentito di valutare il lavoro di ogni singolo studente, esaminando le riflessioni scritte prodotte di volta in volta intorno ai problemi sollevati, e il contributo che ciascuno ha dato alle discussioni in classe, puntualmente registrate. Questa valutazione è stata affiancata da forme più tradizionali di verifica, al fine di controllare l'acquisizione delle conoscenze e delle competenze matematiche coinvolte. Rilevo, per inciso, che la prova scritta di matematica che ho proposto al termine del percorso ha fatto registrare i risultati migliori tra quelli conseguiti dalla classe.

Per quanto riguarda invece la valutazione delle capacità più generali che erano coinvolte in questo percorso, ho predisposto, con la collaborazione preziosa dell'insegnante di Italiano, una prova (v. Appendice) che utilizza una delle tipologie previste per la prima prova scritta del nuovo Esame di stato, il saggio breve.

Ci è sembrato importante che gli studenti, che erano stati coinvolti in un lavoro di riflessione critica sulla probabilità, nel quale avevano sperimentato per la prima volta in modo così sistematico, lo scrivere intorno ad argomenti scientifici e matematici, fossero impegnati a produrre un testo scritto, partendo da alcuni documenti. In questo lavoro gli studenti hanno potuto utilmente avvalersi anche di tutte le informazioni acquisite nell'abito delle *finestre* di Fisica e di Filosofia.

BIBLIOGRAFIA

Baclawski K., Cersasoli M., Rota G-C. 1984, *Introduzione alla probabilità*, Unione Matematica Italiana, Bologna.

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L.1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni,

Bruner J. 1997, *La cultura dell'educazione*, Feltrinelli, Milano.

Cambi F. , *Narratività e discorso pedagogico*,

Castelnuovo E. 1993, *Pentole, ombre, formiche*, La Nuova Italia, Scandicci (Firenze).

Castelnuovo G. 1919, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, Bologna.

Costantini D., Mondadori M. 1973, *Induzione e probabilità*, in "Le Scienze", 58 (apparso anche nella raccolta *Verità e dimostrazione, questioni di matematica*, Le Scienze, Milano 1978).

Costantini D. (a cura di) 1997, *Caso, probabilità e statistica*, "Le Scienze-quaderni", 98.

Daboni L. 1980, *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, Torino.

De Finetti B. 1937, *La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives*, "Annales de l'Institut Henri Poincarè", 7, pp. 1–68.

De Finetti B. 1967, *Il "saper vedere" in matematica*, Loescher, Torino.

Hoffmann P. 1999, *L'uomo che amava solo i numeri*, Mondadori. Milano.

Laplace P.-S. de 1967, *Opere*, trad. it., UTET, Torino.

Luccio F., Pagli L. (a cura di) 1992, *La matematica della complessità*, "Le Scienze-quaderni", 67.

Maraschini W., Palma M. 1994, *Conoscenze matematiche*, vol. 2, Paravia, Torino.

Pascal B. 2000, *Pensieri*, Bompiani, Milano.

Piattelli Palmarini M. 1993, *L'illusione di sapere*, Mondadori, Milano.

Poincaré H. 1995, *Geometria e caso*, Bollati Boringhieri, Torino.

Prodi G. 1992, *Metodi matematici e statistici*, McGraw-Hill, Milano.

APPENDICE

<u>*Lettura n.1*</u>

CONSIDERAZIONI DI GALILEO SUL GIOCO DELLA ZARA

Il gioco della zara (dall'arabo az-zahr*, il dado; parola dalla quale, attraverso il francese* hasard*, deriva anche la parola* azzardo*) molto diffuso a partire dal Medioevo, consisteva nello scommettere sulla somma dei numeri ottenuti nel lancio di tre dadi. Intorno al 1630 alcuni gentiluomini fiorentini dediti a questo gioco posero a Galileo un quesito. Essi avevano infatti osservato che lanciando tre dadi si ottengono più spesso 10 e 11, come somma dei tre punti, che non 9 e 12. Ciò appariva loro strano dal momento che avevano osservato che quei quattro numeri sono ottenibili come somma di tre numeri da 1 a 6, nello stesso numero di modi.*

Che nel giuoco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi degli altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3 e il 18, come punti che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6 e quello con 1.1.1, e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi che v.g. il 6 o il 7, li quali in più maniere si compongono, cioè il 6 con 1.2.3 e con 2.2.2 2 con 1.1.4 ed il 7 con 1.1.5, 1.2.4, 1.3.3, 2.2.3. tuttavia ancorché il 9 e il 12 in altrettante maniere si compongono in quante il 10 e l'11, perloché d'egual uso dovriano esser reputati, si vede nondimeno che la lunga osservazione ha fatto dai giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.
E che il 9 e il 10 si formino(e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12 e 11), si formino, dico, con pari diversità di numeri , è manifesto; imperrocché il 9 si compone con 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3 che sono sei triplicità, ed il 10 con 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4 e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io, per servire a chi m'ha comandato che io debba produr ciò che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con speranza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io possa al mio fine, comincio a considerare come essendo un dado terminato da sei faccie, sopra a ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36 scoperte tra di loro differenti, poiché ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6 scoperte diverse; onde è manifesto, tali combinazioni essere sei volte 6, cioè 36. E se poi aggiugneremo il terzo dado, perché ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36 scoperte delli altri due dadi, avremo le scoperte di tre dadi esser sei volte 36, cioè 216, tutte tra di loro differenti. Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3.4.5 sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, avremo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tali investigazioni dal 3 sino al 10, perché quello che converrà a uno di questi numeri, converrà anche al suo sossopra.
Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quello che resta: la prima è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi; e così il 3 non si può formare se non dalle tre faccie dell'asso, ed il 6, quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una scola scoperta. Seconda: il punto che si compone dai tre numeri, due de'quali sieno i medesimi e il terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v.g., il 4, che nasce dal 2 e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scopra 2 e il secondo e terzo scuoprano asso, o scuoprendo il secondo dado 2 e il primo e il terzo asso, o scuoprendo il terzo 2 e il primo e secondo asso. E così v.g. l'8, in quanto resulta da 3.3.2, può prodursi parimente in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2 e li altri 3 per uno, o scuoprendo il secondo dado 2 ed il primo e terzo 3, o finalmente scuoprendo il terzo dado 2 ed il primo e secondo 3. Terza: quel numero di punti che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in sei maniere; come ad esempio l'8, mentre si compone da 1.3.4 si può fare con sei scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1, il secondo 3 e il terzo 4; seconda, quando il primo dado faccia pur 1, ma il secondo 4 e il terzo 3; terza, quando il secondo dado faccia 1, e il primo 3 e il terzo 4; quarta, facendo il secondo pur 1, e il primo 4 e il terzo3; quinta, quando facendo il terzo dado 1, il primo faccia 3 e il secondo 4; sesta, quando sopra l'1 del terzo dado, il primo farà 4 e il secondo 3. Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti; primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri uguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri eguali e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere. Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire in quante scoperte differenti si posson formare tutti i numeri dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende; in fronte della quale sono notati i punti dei tiri dal 10 in giù sino al 3, e sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri; come per esempio, nella prima casella

1 3 6 10	10		9		8		7		6		5		4		3	
15	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
21	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3				
25	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1						
27	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3								
	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3										
	4 3 3	3	3 3 3	1												
108																
108 ____ 216		27		25		21		15		10		6		3		1

abbiamo il punto 10 e sotto di esso sei triplicità di numeri con i quali egli si può comporre, che sono 6.3.1, 6.2.2, 5.4.1, 5.3.2., 4.4.2, 4.3.3. E perché la prima triplicità 6.3.1 è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6 scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6.3.1 si nota 6, ed essendo la seconda 6.2.2, composta di due numeri eguali e di un altro d1iverso, non può prodursi se non in 3 differenti scoperte, però se gli nota accanto 3; la terza triplicità 5.4.1, composta di tre numeri diversi, può farsi da 6 scoperte, onde si nota col numero6, e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede come il punto 10 può farsi da 27 scoperte di dadi differenti, ma il punto 9 da 25 solamente, e l'8 da 21, il 7 da 15, il 6 da 10, il 4 da 3 e finalmente il 3 da 1, le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte de sossopri, cioè dei punti11.12.13.14.15.16.17.18 si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle faccie dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno, che intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, degl'incontri e di qualunque altra particolar regola che in esso giuoco si osserva.

[da Galileo Galilei *Opere*, in *Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli* (1992)]

Lettura n.2

IL PROBLEMA DELLE PARTI: LA SOLUZIONE DI FERMAT

Il problema delle parti può essere così formulato: due giocatori disputano una sequenza di partite di un qualunque gioco e vince chi per primo raggiunge un numero prefissato di vittorie; per un qualche motivo il gioco viene interrotto quando a ciascun giocatore manca un certo numero di punti per vincere; come si deve suddividere la posta tra i due giocatori? Quella che segue è la soluzione proposta da Pierre de Fermat così come viene illustrata nella lettera che Blaise Pascal inviò allo stesso Fermat il 24 agosto 1654.

Se due giocatori, giocando in più partite, si trovano in questa situazione che mancano due partite al primo e tre al secondo, per trovare la spartizione è necessario (dite voi) vedere in quante partite il gioco sarà assolutamente deciso.
È agevole valutare che ciò sarà in quattro partite, da dove voi concludete che è necessario vedere quanti esiti possono avere quattro partite tra due giocatori e vedere quante sono le combinazioni per far vincere il primo e quante per il secondo e dividere il denaro seguendo questa proporzione.
Avrei fatto fatica a capire questo discorso se non lo avessi saputo per conto mio da prima, e anche voi l'avevate scritto con questa idea.
Dunque per vedere quanti esiti possono avere quattro partite fra due giocatori, è necessario immaginare che essi giochino con un dado a due facce (giacché non sono che due giocatori) come a testa o croce e che essi gettino quattro di questi dadi (poiché essi giocano in quattro partite); e adesso è necessario vedere quanti assetti differenti possono avere questi dadi. Questo è agevole da verificare: essi possono averne sedici che è la seconda potenza di quattro, cioè il quadrato. Immaginiamo che una delle facce sia segnata *a*, favorevole al primo giocatore, e l'altra *b*, favorevole al secondo; dunque questi quattro dadi possono porsi in uno di questi sedici assetti: *aaaa*,…,*bbbb*). E poiché mancano due partite al primo giocatore tutte le facce che hanno due *a* lo fanno vincere, dunque ce ne sono per lui 11; e poiché mancano tre partite al secondo, tutte le facce che hanno tre *b* lo possono far vincere. Dunque è necessario che essi dividano la somma come 11 a 5.

aaaa	1
aaab	1
aaba	1

aabb	1
abaa	1
abab	1
abba	1
abbb	2
baaa	1
baab	1
baba	1
babb	2
bbaa	1
bbab	2
bbba	2
bbbb	2

[dalla lettera di Pascal a Fermat del 24 agosto 1654, in *Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli* (1992)]

Lettura n.3

IL PROBLEMA DELLE PARTI: LA SOLUZIONE DI PASCAL

Quella che segue è la soluzione proposta da Pascal al problema delle parti nella sua lettera a Fermat del 29 luglio 1654.

Ecco, pressappoco, come faccio per sapere il valore di ciascuna partita, quando due giocatori giocano, per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32 monete: supponiamo , per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32 monete: supponiamo che il primo ne abbia due e l'altro una; essi giocano adesso una partita della quale la sorte è tale che se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete; se la vince l'altro, essi sono a due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la sua posta, cioè ciascuno 32 monete. Considerate dunque, signore, che se il primo vince gli toccano 64; se egli perde gli toccano 32. Dunque se essi vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giocarla, il primo deve dire: "Io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure". Egli avrà dunque 48 monete e l'altro 16.
Supponiamo adesso che il primo abbia due partite e l'altro nessuna, e che essi comincino a giocare una partita. La sorte di questa partita è tale che se vince il primo egli prende tutto il denaro, 64 monete; se vince l'altro, eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l'altro una.
Ora noi abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha due partite, 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli deve dire così: "Se io la vinco guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo, mi apparterrà legittimamente 48: datemi dunque le 48 che mi sono certe nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c'è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io". Così egli avrà 48 e 8, che sono 56 monete.
Supponiamo infine che il primo non abbia che una partita e l'altro nessuna. Voi vedete, signore, che se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56, se egli perde, essi sono a pari: dunque gli appartengono 32 monete. Dunque egli deve dire: "Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto di 56 a metà. Da 56 toglie 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12, ed io 12, che con 32, fanno 44".
Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che, per la prima partita, gli appartengono 12 monete; per la seconda altre 12; e per l'ultima 8.

[dalla lettera di Pascal a Fermat del 29 luglio 1654, in *Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli* (1992)]

Lettura n.4

LA VALUTAZIONE DI UNA PROBABILITÀ

La nozione di probabilità, così come l'abbiamo descritta, è senza dubbio la più vicina a quella dell'uomo "della strada"; meglio ancora, è esattamente quella che egli applica tutti i giorni nei suoi giudizi pratici. Perché la Scienza dovrebbe allontanarsene? Quale significato più adeguato ella dovrebbe scoprire?
Si potrebbe credere, in prima battuta, che la probabilità, nel senso abituale, non possa costituire l'oggetto di una teoria matematica. Tuttavia abbiamo visto che le regole del calcolo delle probabilità, concepite come le condizioni necessarie ad assicurare la coerenza tra le valutazioni di probabilità di uno stesso individuo, possono al contrario essere sviluppate e dimostrate rigorosamente. In effetti esse non costituiscono che l'espressione precisa di regole della logica del probabile che sono applicate in modo incosciente, qualitativamente se non quantitativamente, da tutti gli uomini in tutte le circostanze della loro vita..
Si può dubitare ancora che questa concezione, che lascia del tutto libero ciascun individuo di valutare le probabilità come crede, purché sia soddisfatta la sola condizione di coerenza, sia sufficiente per rendere conto delle concordanze più o meno strette che si osservano tra i giudizi di diversi individui così come tra le previsioni e i risultati ottenuti. C'è dunque, tra le infinite valutazioni perfettamente ammissibili in sé stesse, una valutazione particolare che si possa qualificare, in un senso ancora sconosciuto, come *obiettivamente giusta*? O almeno, possiamo chiederci se una valutazione data è più giusta di un'altra?
Due sono i metodi dai quali si è pensato di poter dedurre un significato oggettivo della probabilità: da una parte lo schema dei casi ugualmente probabili, e d'altra parte la considerazione delle frequenze. Effettivamente è su questi due metodi che si fonda generalmente la valutazione di una probabilità nei casi in cui normalmente le opinioni della maggior parte degli individui coincidono. Però questi stessi metodi non obbligano assolutamente ad ammettere l'esistenza di una probabilità oggettiva: al contrario, se si vuole forzare il loro significato per arrivare a una tale conclusione, si incontrano delle difficoltà ben note, che spariscono quando si diviene un po' meno esigenti, cioè a dire quando non si cerca di eliminare ma piuttosto di precisare quanto di soggettivo ci sia in quei metodi. In altri termini si tratta di considerare la coincidenza delle opinioni come un fatto psicologico; le ragioni di questo fatto possono allora conservare la loro natura soggettiva, che non si può lasciare da parte senza sollevare una moltitudine di questioni il cui senso non è troppo chiaro. Così nel caso dei giochi d'azzardo che sono all'origine del calcolo delle probabilità, non c'è nessuna difficoltà a capire e a trovare naturale che gli uomini siano generalmente portati, attraverso considerazioni di simmetria più o meno precise, ma senza alcun dubbio spontanee, ad attribuire probabilità uguali ai diversi casi possibili. Si può allora giustificare immediatamente la definizione classica della probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili […] Si ottiene così un criterio molto comodo e molto potente: non solo perché ci da la possibilità di calcolare facilmente la probabilità quando si trova una suddivisione in casi, giudicati ugualmente probabili, ma ancor più perché ci fornisce in generale un metodo per valutare per comparazione una probabilità qualunque, riconducendo la valutazione quantitativa direttamente a dei giudizi puramente qualitativi (uguaglianza o ineguaglianza di due probabilità). Tuttavia questo criterio non è applicabile che nell'ipotesi che l'individuo che valuta le probabilità giudichi ugualmente probabili i casi considerati; ciò è ancora dovuto ad un giudizio soggettivo, che le abituali considerazioni di simmetria che abbiamo ricordato possono spiegare nelle sue ragioni psicologiche, ma che non possono assolutamente trasformare in qualcosa d'oggettivo. Se per esempio si volesse dimostrare che la valutazione fondata sull'ipotesi dell'equiprobabilità è la sola "giusta", e che se un individuo non la condivide allora si "sbaglia", si dovrebbe dapprima spiegare che cosa si intende affermare dicendo che un individuo valuta correttamente una probabilità oppure che si sbaglia, e poi si dovrebbe dimostrare che le citate considerazioni di simmetria implicano necessariamente che si debba accettare l'ipotesi dell'equiprobabilità se non ci si vuole "sbagliare". Ora, un evento qualunque può verificarsi o non verificarsi, e né in un caso né nell'altro si può decidere quale sia il grado di dubbio col quale è "ragionevole" o "giusto" di aspettarlo prima si sapere se si è realizzato o no.
Consideriamo adesso l'altro criterio, quello delle frequenze. Si tratta di spiegare la sua validità dal punto di vista soggettivo, e di dimostrare precisamente che esso conserva tutto il suo contenuto, ma che, come il criterio precedente e come ogni altro criterio possibile, è incapace di condurci fuori dal campo dei giudizi soggettivi, di cui non può che offrirci un'analisi psicologica più avanzata. Nel caso delle frequenze, questa analisi si divide in due parti: una parte elementare, che limita le relazioni tra valutazioni di probabilità e previsioni delle frequenze future; una seconda parte più delicata , concernente le relazioni tra l'osservazione delle frequenze passate e la previsione delle frequenze future. Per il momento, noi ci limiteremo alla prima questione, ammettendo come fatto psicologico dato, le cui ragioni saranno analizzate in seguito, il fatto che si prevedano generalmente delle frequenze future vicine a quelle che sono state osservate. […]

[da Bruno De Finetti, *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives* (1937)]

Lettura n. 5

LA LOGICA DEL PROBABILE

La "verità" di un'asserzione, di una proposizione, si può intendere in due modi: o, in senso obiettivo, come conformità a una realtà esterna, concepita come indipendente da noi, o, in senso soggettivo, come conformità alle nostre opinioni, impressioni, sensazioni.

La logica è la scienza che dalla verità o dalla falsità di certe premesse insegna a dedurre e concludere la verità o falsità di certe conseguenze; a seconda del senso che daremo al concetto di verità avremo dunque due modi diversi di concepire la logica. Se la verità si concepisce in senso obbiettivo, la logica appare come una proprietà di cui deve godere il mondo reale, come una specie di legge esteriore che regola la verità o la falsità, in senso obbiettivo, di certe proposizioni. Se ci si limita invece all'aspetto soggettivo, la logica non riguarda che i processi mentali, e non insegna se non la coerenza del pensiero in sé stesso. Questa seconda accezione è più generale e più larga dell'altra, perché indipendente da ogni particolare precisazione del valore da dare al concetto di "vero" o di "falso".
Di molte asserzioni, o *proposizioni*, spesso non sappiamo dire se sono "vere" o "false" (ad es. per quasi tutto ciò che riguarda gli eventi futuri), ma soltanto se sono più o meno *verosimili* o *probabili*. Anche qui si presentano le due alternative: di concepire tale valutazione di probabilità come avente un senso obbiettivo, o come avente semplicemente un senso soggettivo. Quasi sempre si cerca, anche con grandi sforzi, di persuadere e di persuadersi dell'esistenza di un significato obbiettivo; tutti questi sforzi ebbero però sempre un esito poco soddisfacente, tanto vero che nessuna definizione o concezione di probabilità ha mai saputo imporsi o affermarsi.
Il calcolo delle probabilità è la logica del probabile. Come la logica formale insegna a dedurre la verità o falsità di certe conseguenze dalla verità o falsità di certe premesse, così il calcolo delle probabilità insegna a dedurre la maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe conseguenze dalla maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe premesse. Per chi attribuisca alla probabilità un significato obbiettivo, il calcolo delle probabilità dovrebbe avere un significato obbiettivo, i suoi teoremi esprimere delle proprietà che nel campo del reale risultano soddisfatte. Ma è inutile fare simili ipotesi. Basta limitarsi alla concezione soggettiva, considerare cioè la probabilità come il grado di fiducia sentito da un dato individuo nell'avverarsi di un dato evento, e si può dimostrare che i noti teoremi del calcolo delle probabilità sono condizioni necessarie e sufficienti perché le opinioni di un dato individuo non siano intrinsecamente contraddittorie e incoerenti.

[da Bruno De Finetti, *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*, in *Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli* (1992)]

Lettura n.6

PROBABILITÀ: TEORIA E CALCOLO

Nel calcolo delle probabilità occorre distinguere fra un nucleo matematico vero e proprio (che è la parte a cui spetta più propriamente il termine di *Calcolo*) e lo studio dei significati della probabilità (tema per cui è stato introdotto il termine *Teoria della Probabilità*).
Accade insomma nel campo della probabilità qualcosa di simile a quello che accade in Geometria, dove vi è una parte puramente matematica che almeno in via di principio, potrebbe essere sviluppata in modo del tutto assiomatico-deduttivo, a prescindere da ogni significato, e vi è una parte applicativa che entra in azione quando si deve applicare la teoria alla realtà; allora le interpretazioni possono essere diverse: ad esempio, una retta può assumere il ruolo di un filo teso, oppure di un raggio luminoso, ecc.
Nel Calcolo delle Probabilità, la diversità, anzi la divergenza fra i modi di intendere il significato, può essere ancora maggiore che in geometria, in relazione ai disparati campi a cui la probabilità può essere applicata (fisica, biologia, economia, psicologia, studio dei comportamenti umani,…). […]
Quello che si può fin d'ora affermare è che *la probabilità riguarda il nostro modo di conoscere*. L'analogia più calzante è quella con la logica, che è anch'essa una riflessione sulla conoscenza (precisamente, sulla conoscenza deduttiva).
Conviene fare partire il nostro discorso proprio da questa analogia.
Consideriamo quella parte più iniziale e più semplice della logica che viene detta logica proposizionale. Gli ingredienti sintattici sono questi:

- Le lettere A, B, C,…, X, Y, Z che indicano affermazioni qualsiasi (proposizioni).
- I connettivi logici che ridotti all'essenziale possono essere:
  $\neg$ (che significa "non"); $\wedge$ (che significa "e"); $\vee$ (che significa "o", intesa come disgiunzione non esclusiva).
- Le parentesi, che hanno il solito ruolo di raggruppare parti di una formula.

A questo punto si introducono i valori di verità $\{0,1\}$.
Ad ogni variabile A, B, C… si attribuisce il valore di verità **1** se la si ritiene vera, **0** se la si ritiene falsa. La parte più elementare del calcolo logico consiste nel trovare il valore di verità di un'espressione, a partire dai valori di verità delle variabili proposizionali A, B, C,…
Nel Calcolo delle Probabilità si compie una generalizzazione: ad ogni affermazione A si attribuisce una **probabilità** (che si indica con $P(A)$) che è un numero reale compreso tra 0 e d 1:

$$0 \le P(A) \le 1 .$$

[da Giovanni Prodi, *Metodi matematici e statistici* (1992)]

PROVA FINALE

Dopo aver letto attentamente le citazioni presentate, tratta i seguenti punti:

a) introduci in termini generali la teoria delle probabilità, con sintetiche ed opportune informazioni, anche di carattere storico;

b) metti in evidenza le caratteristiche peculiari che la teoria in esame possiede secondo De Finetti e secondo Piattelli Palmarini;

c) analizza le fondamentali differenze esistenti tra questi due modelli;

d) indica, motivando la tua scelta, quale modello senti di preferire.

> Prima di tutto vorrei mettere in guardia contro un consiglio di D'Alembert, che sarebbe disastroso nel campo della probabilità […]: *Allez de l'avant: la foi vous viendra*[1]. Se uno va avanti senza liberarsi, chiarendoli, dei primi naturali fraintendimenti o remore, sarà pur vero, purtroppo, che la fede gli viene, ma non nel senso giusto del *credo perché è chiaro*, bensì in quello aberrante del *credo quia absurdum*. Si tratta dell'accettazione della nozione di Probabilità come di un *deus ex machina* scaturito da ragionamenti astratti che evitano con cura di spiegare il senso della probabilità che è quello di cui noi tutti (uomini ed altri animali) ci valiamo per valutare pericoli e rischi e prospettive più o meno felici e lusinghiere. La probabilità, infatti, è la nostra *guida* nel *pensare* e nell'*agire* in condizioni di *incertezza*, e l'incertezza è *dovunque*. La teoria della probabilità è la logica (più o meno istintiva, e perfezionata come istinto e come facoltà razionale, inconscia oppure più o meno scientificamente organizzata e connaturata), con la quale ci studiamo di fare le nostre scelte col proposito di ottimizzare le nostre prospettive. Il calcolo delle probabilità permette di tradurre tali ragionamenti inconsci e istintivi in uno schema di valutazione attenta del pro e del contro, che difficilmente potrebbe (e, penso, neppure dovrebbe) sostituire la spontaneità delle decisioni istintive con una fredda contabilità di profitti e di perdite, ma gioverebbe comunque a perfezionare e controllare tale dote spontanea o a corroborarla con un'apprezzabile indicazione orientativa.
>
> Bruno De Finetti, *La logica dell'incerto* (1989)

[1]Andate avanti, la fede verrà

> Dopo secoli e secoli che l'uomo aveva scoperto come far di conto , calcolare esattamente le aree e pesare esattamente le merci, fu solo alla metà del Settecento che venne a capo di un enigma che, pure, doveva averlo attanagliato da sempre: come calcolare una probabilità ignota da dati noti. Come calcolare il futuro, basandosi su dati precisi che riguardano il passato? Se non altro, le pagine precedenti ci avranno mostrato che le nostre intuizioni correnti sono una base del tutto inattendibile per raggiungere questo traguardo. Per riuscire bisognava *sovvertire* le nostre intuizioni. La legge di Bayes può tranquillamente essere annoverata tra le più grandi scoperte dell'intelligenza umana. […]. Nell'esperienza della vita ordinaria ci troviamo a dover prendere decisioni sulla base di informazioni incomplete e a cercare ulteriori dati al fine di correggere, o confermare, le nostre decisioni. Un caso tipico è quello in cui si deve ragionevolmente *prevedere* un qualche sviluppo di eventi che avverrà nel futuro e si cerca di ottenere il massimo di informazione sugli sviluppi *più probabili*. Il modello studiato per eccellenza è quello dello scienziato che avanza un'ipotesi, effettua dei test e poi decide fino a che punto i risultati di questi test verificano o falsificano la sua teoria. Si tratta di *calcolare* esattamente, non di stimare a lume di naso, *quanto* è probabile che una teoria, o un'ipotesi, sia vera, *dato tutto quello che sappiamo*.
>
> Massimo Piattelli Palmarini, *L'illusione di sapere* (1993)